



**João Pedro Nunes Pires Alves**

Licenciado em Ciências da Engenharia Mecânica

## **Avaliação da Incerteza em Modelos de Materiais Compósitos Laminados**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em  
Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Doutor Tiago Alexandre Narciso da  
Silva, Professor Auxiliar Convidado, FCT-UNL

Júri

Presidente: Doutor João Mário Burguete Botelho Cardoso  
Vogal: Doutora Maria Amélia Ramos Loja  
Vogal: Doutor Tiago Alexandre Narciso da Silva



FACULDADE DE  
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

**Setembro 2017**



## **Avaliação da Incerteza em Modelos de Materiais Compósitos Laminados**

Copyright © João Pedro Nunes Pires Alves, FCT/UNL, UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor



## Agradecimentos

Gostaria de, em primeiro lugar, agradecer ao meu orientador Professor Tiago Silva pelo tempo e paciência disponibilizados na orientação deste trabalho.

Quero também agradecer à minha família e, em especial, aos meus pais e irmã pela importância fundamental que tiveram ao longo de todo o meu percurso académico, disponibilizando todas as condições para que eu pudesse concluir a minha formação com sucesso.

Quero agradecer à Luísa por toda a motivação e apoio ao longo destes anos, e também por ter sido essencial para que eu percebesse aquilo que realmente queria fazer.

Por fim, gostaria de deixar um agradecimento a todos os Professores que contribuíram para a minha formação ao longo de todo o meu percurso académico.

Um muito obrigado a todos!



# Resumo

Devido à complexidade envolvida no projeto e fabrico de estruturas de material compósito laminado, verifica-se que existem diversas fontes de incerteza que contribuem para a variabilidade do seu comportamento estrutural. Tendo em conta os processos de fabrico destes materiais, considera-se significativa a dispersão das suas propriedades geométricas e mecânicas na variabilidade das propriedades finais destas estruturas. Por outro lado, devido à crescente utilização de materiais compósitos nas mais variadas aplicações de Engenharia, torna-se cada vez mais importante quantificar/antecipar estas mesmas incertezas. Verifica-se, portanto, que existe a necessidade de implementar métodos que considerem, durante a fase de projeto, as incertezas associadas ao comportamento estático e dinâmico de estruturas de material compósito. No presente trabalho, procura-se quantificar a influência de incerteza em propriedades mecânicas e geométricas de estruturas de material compósito laminado na variabilidade da resposta estrutural. Para tal, realiza-se a propagação de incerteza em modelos de elementos finitos, recorrendo-se à utilização da lógica *fuzzy* para caracterizar a variabilidade da resposta estrutural estática e dinâmica, sob a forma de funções de pertença *fuzzy*. São realizadas simulações considerando incerteza ao nível dos ângulos de orientação das fibras, da espessura das lâminas e das propriedades mecânicas das lâminas. Para além disso, avalia-se também a influência da relação  $a/h$  e da sequência de empilhamento do laminado na variabilidade da resposta. Procura-se estabelecer, de entre os parâmetros sujeitos a incerteza considerados, aqueles que poderão ter um maior impacto na resposta de estruturas de material compósito laminado.

**Palavras Chave:** materiais compósitos; compósitos laminados; incerteza; variabilidade; lógica Fuzzy; elementos finitos; FFEM





# Abstract

The considerable complexity of the design and manufacturing of laminated composite material structures leads to several uncertainty sources that contribute to the structural response variability. Considering the manufacturing process of these materials, the dispersion of mechanical and geometrical properties has a significant impact on the variability of the structure final properties. In addition, the increasing use of composite materials in several Engineering applications, intensifies the need of anticipating these uncertainty's. Thus, there is a necessity for methods that allow, during the design process, to consider the uncertainties associated with the static and dynamic behavior of composite material structures. In the present work, one tries to make a proper evaluation of how uncertainty's in mechanical and geometrical properties of laminated composite structures affect the variability of the structural response. For this purpose, one carries out a propagation of uncertainty on finite element models, using fuzzy logic to quantify the static and dynamic structural response variability as fuzzy membership functions. Several case studies are analyzed, considering uncertainty of the fiber orientation angles, lamina thickness and lamina mechanical properties. In addition, the influence of the a/h laminate ratio and stacking sequence in structural response variability is also evaluated. In this work, one tries to determine which of considered uncertain parameters have a bigger impact on the structural response of laminated composite structures.

**Keywords:** composite materials; laminated composites; uncertainty; variability; fuzzy logic; finite elements; FFEM



# Índice

Lista de Figuras .....	XI
Lista de Tabelas .....	XIII
Lista de Siglas e Nomenclatura.....	XIV
1. Introdução.....	1
1.1 Motivação.....	1
1.2 Objetivos .....	3
1.3 Revisão Bibliográfica .....	3
1.4 Estrutura da Dissertação .....	5
2. Fundamentos Teóricos.....	7
2.1 Materiais Compósitos .....	7
2.1.1 Classificação de Materiais Compósitos .....	7
2.1.2 Materiais Compósitos Laminados Reforçados por Fibras (FRC).....	9
2.1.3 Modelação do Comportamento de FRC.....	9
2.1.4 Sequência de Empilhamento.....	17
2.1.5 Incerteza em Materiais Compósitos Laminados .....	19
2.2 Lógica Fuzzy.....	23
2.2.1 Definição de um conjunto Fuzzy .....	23
2.2.2 Definição de intervalo .....	23
2.2.3 Definição de $\alpha$ - cut de um conjunto Fuzzy .....	24
2.2.4 Números Fuzzy .....	24
2.2.5 Tipos de Números Fuzzy.....	24
2.3 Métodos de Propagação de Incerteza em Modelos Computacionais .....	26
2.3.1 Tipos de Incerteza .....	26
2.3.2 Métodos Probabilísticos.....	26
2.3.3 Métodos Não Probabilísticos .....	27
3. Métodos de Simulação Numérica .....	31
3.1 Simulação de Incerteza nos Parâmetros de Modelação .....	31
3.2 ANSYS Mechanical APDL .....	32
3.2.1 Modelação de Materiais Compósitos Laminados Utilizando o ANSYS Mechanical APDL .....	33
3.3 Implementação do FFEM .....	36
3.3.1 Descrição do Modelo Computacional para Propagação de Incerteza .....	37
3.4 Estudo de Convergência.....	39
3.4.1 Análise Estática.....	39

3.4.2	Análise Dinâmica .....	41
3.5	Verificação da Análise de Elementos Finitos.....	42
3.5.1	Verificação dos Resultados da Deformada Transversal Máxima .....	42
3.5.2	Verificação dos Resultados da Frequência Natural Fundamental .....	44
3.6	Número de Níveis $\alpha$ Considerados na Simulação .....	45
4.	Casos de Estudo .....	47
4.1	Parâmetros Gerais da Análise .....	47
4.1.1	Tipos de Análise e Respetivas Condições Fronteira .....	47
4.1.2	Estrutura Analisada .....	48
4.1.3	Propriedades do Material .....	48
4.1.4	Métricas de Análise de Resultados .....	49
4.2	Incerteza na Orientação das Fibras.....	50
4.2.1	Resultados Simulação Estática .....	51
4.2.2	Resultados Simulação Dinâmica - Frequência Natural Fundamental .....	57
4.2.3	Resultados Simulação Dinâmica - FRFs .....	61
4.3	Incerteza na Espessura das Lâminas .....	65
4.3.1	Resultados Simulação Estática .....	66
4.3.2	Resultados Simulação Dinâmica – Frequência Natural Fundamental.....	71
4.3.3	Resultados Simulação Dinâmica - FRFs .....	75
4.4	Incerteza nas Propriedades Mecânicas da Lâmina .....	79
4.4.1	Resultados Simulação Estática .....	81
4.4.2	Resultados Simulação Dinâmica – Frequência Natural Fundamental.....	88
4.4.3	Resultados Simulação Dinâmica – FRFs .....	95
5.	Conclusões.....	99
6.	Bibliografia .....	103

# Lista de Figuras

FIGURA 2.1 - CLASSIFICAÇÃO DE MATERIAIS COMPÓSITOS COM BASE NO TIPO DE REFORÇO [11].....	7
FIGURA 2.2 - EXEMPLOS DE REFORÇOS DE MATERIAIS COMPÓSITOS: <b>A)</b> PARTÍCULAS <b>B)</b> FIBRAS UNIDIRECIONAIS DESCONTÍNUAS <b>C)</b> FIBRAS DESCONTÍNUAS COM ORIENTAÇÃO ALEATÓRIA <b>D)</b> FIBRAS UNIDIRECIONAIS CONTÍNUAS. ....	8
FIGURA 2.3 - LÂMINA DE FIBRAS UNIDIRECIONAIS CONTÍNUAS E O RESPECTIVO REFERENCIAL DO MATERIAL ( $x_1, x_2, x_3$ ). ....	11
FIGURA 2.4 - LÂMINA COM O REFERENCIAL DO LAMINADO (GLOBAL) E O REFERENCIAL DO MATERIAL (LOCAL). ADAPTADO DE [1].....	13
FIGURA 2.5 - GEOMETRIA NÃO-DEFORMADA E DEFORMADA DO BORDO DE UMA PLACA, ASSUMINDO AS CONDIÇÕES DA FSDT [6].....	14
FIGURA 2.6 - NUMERAÇÃO DAS LÂMINAS DE UM COMPÓSITO LAMINADO. ADAPTADO DE [6]. ....	16
FIGURA 2.7 - LAMINADO ANGULAR (ANGLE-PLY) E LAMINADO CRUZADO (CROSS-PLY).....	18
FIGURA 2.8 - TAXONOMIA DE DEFEITOS EM MATERIAIS COMPÓSITOS. ADAPTADO DE [15]. ....	22
FIGURA 2.9 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UM CONJUNTO FUZZY, EVIDENCIANDO DIFERENTES $\alpha$ -CUTS [21]. ....	24
FIGURA 2.10 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UMA FUNÇÃO DE PERTENÇA TRIANGULAR [21].....	25
FIGURA 2.11 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO MÉTODO DOS VÉRTICES [27].....	29
FIGURA 3.1 - GEOMETRIA DOS ELEMENTOS SHELL 181 E SHELL 281, RESPECTIVAMENTE (28). ....	35
FIGURA 3.2 - TIPOS DE CONDIÇÕES FRONTEIRA PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS SIMPLEMENTE APOIADAS. ....	36
FIGURA 3.3 - ESQUEMA DESCRITIVO DO FUNCIONAMENTO DO MODELO COMPUTACIONAL IMPLEMENTADO. ....	38
FIGURA 3.4 - GRÁFICOS DAS FUNÇÕES DE PERTENÇA FUZZY DOS ÂNGULOS DAS FIBRAS E DAS RESPECTIVAS DEFORMADA MÁXIMAS: <b>A)</b> 3 A-CUT <b>B)</b> 6 A-CUT <b>C)</b> 11 A-CUT.....	45
FIGURA 4.1 - LOCALIZAÇÃO DOS PONTOS DE APLICAÇÃO DA CARGA E MEDIÇÃO DA RESPOSTA PARA A ANÁLISE HARMÔNICA.	48
FIGURA 4.2 - GRÁFICOS DAS FUNÇÕES DE PERTENÇA FUZZY PARA OS ÂNGULOS DAS FIBRAS DE UMA LÂMINA (ÂNGULOS DE $0^\circ$ E $90^\circ$ , RESPECTIVAMENTE). ....	50
FIGURA 4.3 - GRÁFICOS DAS FUNÇÕES DE PERTENÇA FUZZY DA DEFORMADA MÁXIMA ADIMENSIONAL (CASOS 1.1 E 2.1). ...	51
FIGURA 4.4 - GRÁFICOS DAS FUNÇÕES DE PERTENÇA FUZZY DA DEFORMADA MÁXIMA ADIMENSIONAL (CASOS 1.2 E 2.2). ...	52
FIGURA 4.5 - GRÁFICO DA FUNÇÃO DE PERTENÇA FUZZY DA DEFORMADA MÁXIMA DA PLACA (INCERTEZA NOS ÂNGULOS DA LÂMINA 1, 2, 3 E 4, RESPECTIVAMENTE). ....	54
FIGURA 4.6 - GRÁFICOS DAS FUNÇÕES DE PERTENÇA FUZZY DA DEFORMADA MÁXIMA ADIMENSIONAL (CASOS 1.3 E 2.3, RESPECTIVAMENTE).....	55
FIGURA 4.7 - GRÁFICOS DAS FUNÇÕES DE PERTENÇA FUZZY DA FREQUÊNCIA NATURAL FUNDAMENTAL ADIMENSIONAL (CASOS 1.1 E 2.1, RESPECTIVAMENTE).....	57
FIGURA 4.8 - GRÁFICOS DAS FUNÇÕES DE PERTENÇA FUZZY DA FREQUÊNCIA NATURAL FUNDAMENTAL ADIMENSIONAL (CASOS 1.2 E 2.2, RESPECTIVAMENTE).....	58
FIGURA 4.9 - GRÁFICOS DAS FUNÇÕES DE PERTENÇA FUZZY DA FREQUÊNCIA NATURAL FUNDAMENTAL ADIMENSIONAL (CASOS 1.3 E 2.3, RESPECTIVAMENTE).....	59
FIGURA 4.10 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA VARIABILIDADE ASSOCIADA ÀS FRF DA PLACA (CASOS 1.1 E 2.1, RESPECTIVAMENTE).....	61
FIGURA 4.11 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA VARIABILIDADE ASSOCIADA ÀS FRF DA PLACA (CASOS 1.2 E 2.2, RESPECTIVAMENTE).....	62
FIGURA 4.12 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA VARIABILIDADE ASSOCIADA ÀS FRF DA PLACA (CASOS 1.3 E 2.3, RESPECTIVAMENTE).....	64
FIGURA 4.13 - GRÁFICO DA FUNÇÃO DE PERTENÇA FUZZY PARA A ESPESSURA DE UMA LÂMINA. ....	65
FIGURA 4.14 - GRÁFICOS DAS FUNÇÕES DE PERTENÇA FUZZY DA DEFORMADA MÁXIMA ADIMENSIONAL (CASOS 3.1 E 4.1, RESPECTIVAMENTE).....	66
FIGURA 4.15 - GRÁFICOS DAS FUNÇÕES DE PERTENÇA FUZZY DA DEFORMADA MÁXIMA ADIMENSIONAL (CASOS 3.2 E 4.2, RESPECTIVAMENTE).....	67
FIGURA 4.16 - GRÁFICOS DAS FUNÇÕES DE PERTENÇA FUZZY DA DEFORMADA MÁXIMA ADIMENSIONAL (CASOS 3.3 E 4.3, RESPECTIVAMENTE).....	69

FIGURA 4.17 - GRÁFICOS DAS FUNÇÕES DE PERTENÇA FUZZY DA FREQUÊNCIA NATURAL FUNDAMENTAL ADIMENSIONAL (CASOS 3.1 E 4.1, RESPETIVAMENTE) .....	71
FIGURA 4.18 - GRÁFICOS DAS FUNÇÕES DE PERTENÇA FUZZY DA FREQUÊNCIA NATURAL FUNDAMENTAL ADIMENSIONAL (CASOS 3.2 E 4.2, RESPETIVAMENTE) .....	72
FIGURA 4.19 - GRÁFICOS DAS FUNÇÕES DE PERTENÇA FUZZY DA FREQUÊNCIA NATURAL FUNDAMENTAL ADIMENSIONAL (CASOS 3.3 E 4.3, RESPETIVAMENTE) .....	73
FIGURA 4.20 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA VARIABILIDADE ASSOCIADA ÀS FRF DA PLACA (CASOS 3.1 E 4.1, RESPETIVAMENTE).....	75
FIGURA 4.21 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA VARIABILIDADE ASSOCIADA ÀS FRF DA PLACA (CASO 3.2). ....	76
FIGURA 4.22 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA VARIABILIDADE ASSOCIADA ÀS FRF DA PLACA (CASO 4.2). ....	77
FIGURA 4.23 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA VARIABILIDADE ASSOCIADA ÀS FRF DA PLACA (CASOS 3.3 E 4.3, RESPETIVAMENTE).....	78
FIGURA 4.24 - GRÁFICOS DAS FUNÇÕES DE PERTENÇA FUZZY PARA AS PROPRIEDADES MECÂNICAS DA LÂMINA. ....	80
FIGURA 4.25 - GRÁFICOS DAS FUNÇÕES DE PERTENÇA FUZZY DA DEFORMADA MÁXIMA ADIMENSIONAL PARA DIFERENTES PROPRIEDADES MECÂNICAS DA LÂMINA SUJEITAS A INCERTEZA (CASOS 5.1 E 6.1, RESPETIVAMENTE). ....	81
FIGURA 4.26 - GRÁFICOS DAS FUNÇÕES DE PERTENÇA FUZZY DA DEFORMADA MÁXIMA ADIMENSIONAL PARA DIFERENTES PROPRIEDADES MECÂNICAS DA LÂMINA SUJEITAS A INCERTEZA (CASOS 5.2 E 6.2, RESPETIVAMENTE). ....	83
FIGURA 4.27 - GRÁFICOS DAS FUNÇÕES DE PERTENÇA FUZZY DA DEFORMADA MÁXIMA ADIMENSIONAL PARA DIFERENTES PROPRIEDADES MECÂNICAS DA LÂMINA SUJEITAS A INCERTEZA (CASOS 5.3 E 6.3, RESPETIVAMENTE). ....	85
FIGURA 4.28 - GRÁFICOS DAS FUNÇÕES DE PERTENÇA FUZZY DA FREQUÊNCIA NATURAL FUNDAMENTAL ADIMENSIONAL PARA DIFERENTES PROPRIEDADES MECÂNICAS DA LÂMINA SUJEITAS A INCERTEZA (CASOS 5.1 E 6.1, RESPETIVAMENTE). ....	88
FIGURA 4.29 - GRÁFICOS DAS FUNÇÕES DE PERTENÇA FUZZY DA FREQUÊNCIA NATURAL FUNDAMENTAL ADIMENSIONAL PARA DIFERENTES PROPRIEDADES MECÂNICAS DA LÂMINA SUJEITAS A INCERTEZA (CASOS 5.2 E 6.2, RESPETIVAMENTE). ....	90
FIGURA 4.30 - GRÁFICOS DAS FUNÇÕES DE PERTENÇA FUZZY DA FREQUÊNCIA NATURAL FUNDAMENTAL ADIMENSIONAL PARA DIFERENTES PROPRIEDADES MECÂNICAS DA LÂMINA SUJEITAS A INCERTEZA (CASOS 5.3 E 6.3, RESPETIVAMENTE). ....	92
FIGURA 4.31 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA VARIABILIDADE ASSOCIADA ÀS FRF DA PLACA (CASOS 5.1 E 6.1, RESPETIVAMENTE).....	95
FIGURA 4.32 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA VARIABILIDADE ASSOCIADA ÀS FRF DA PLACA (CASO 5.2). ....	96
FIGURA 4.33 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA VARIABILIDADE ASSOCIADA ÀS FRF DA PLACA (CASO 6.2). ....	97
FIGURA 4.34 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA VARIABILIDADE ASSOCIADA ÀS FRF DA PLACA (CASOS 5.3 E 6.3, RESPETIVAMENTE).....	98

# Lista de Tabelas

TABELA 3.4.1 - PROPRIEDADES DO LAMINADO CONSIDERADAS NO ESTUDO DA CONVERGÊNCIA. ....	39
TABELA 3.4.2 - VALORES DA DEFORMADA TRANSVERSAL MÁXIMA (MM) OBTIDOS PARA O ESTUDO DE CONVERGÊNCIA.....	40
TABELA 3.4.3 - VALORES DA FREQUÊNCIA NATURAL FUNDAMENTAL (ADIMENSIONAL), OBTIDOS PARA O ESTUDO DE CONVERGÊNCIA. ....	41
TABELA 3.5.1 - VALORES DA DEFORMADA TRANSVERSAL MÁXIMA (ADIMENSIONAL), OBTIDOS PARA O ESTUDO DE VALIDAÇÃO. ....	43
TABELA 3.5.2 - VALORES DA FREQUÊNCIA NATURAL FUNDAMENTAL (ADIMENSIONAL), OBTIDOS PARA O ESTUDO DE VALIDAÇÃO. ....	44
TABELA 4.1.1 - PROPRIEDADES DO LAMINADO PRÉ-IMPREGNADO (IM7/8552UD HEXCEL COMPOSITES). ....	49
TABELA 4.2.1 - CASOS DE ESTUDO CONSIDERANDO INCERTEZA NOS ÂNGULOS DE EMPILHAMENTO. ....	50
TABELA 4.2.2 - RESULTADOS DA SIMULAÇÃO ESTÁTICA PARA OS CASOS DE ESTUDO 1.1 E 2.1. ....	51
TABELA 4.2.3 - RESULTADOS DA SIMULAÇÃO ESTÁTICA PARA OS CASOS DE ESTUDO 1.2 E 2.2. ....	53
TABELA 4.2.4 - RESULTADOS DA SIMULAÇÃO ESTÁTICA PARA OS CASOS DE ESTUDO 1.3 E 2.3. ....	56
TABELA 4.2.5 - RESULTADOS DA SIMULAÇÃO DINÂMICA PARA OS CASOS DE ESTUDO 1.1 E 2.1.....	58
TABELA 4.2.6 - RESULTADOS DA SIMULAÇÃO DINÂMICA PARA OS CASOS DE ESTUDO 1.2 E 2.2.....	59
TABELA 4.2.7 - RESULTADOS DA SIMULAÇÃO DINÂMICA PARA OS CASOS DE ESTUDO 1.3 E 2.3.....	60
TABELA 4.3.1 - CASOS DE ESTUDO CONSIDERANDO INCERTEZA NA ESPESSURA DAS LÂMINAS. ....	65
TABELA 4.3.2 - RESULTADOS DA SIMULAÇÃO ESTÁTICA PARA OS CASOS DE ESTUDO 3.1 E 4.1. ....	66
TABELA 4.3.3 - RESULTADOS DA SIMULAÇÃO ESTÁTICA PARA OS CASOS DE ESTUDO 3.2 E 4.2. ....	68
TABELA 4.3.4 - RESULTADOS DA SIMULAÇÃO ESTÁTICA PARA OS CASOS DE ESTUDO 3.3 E 4.3. ....	69
TABELA 4.3.5 - RESULTADOS DA SIMULAÇÃO DINÂMICA PARA OS CASOS DE ESTUDO 3.1 E 4.1.....	71
TABELA 4.3.6 - RESULTADOS DA SIMULAÇÃO DINÂMICA PARA OS CASOS DE ESTUDO 3.2 E 4.2.....	72
TABELA 4.3.7 - RESULTADOS DA SIMULAÇÃO DINÂMICA PARA OS CASOS DE ESTUDO 3.3 E 4.3.....	74
TABELA 4.4.1 - CASOS DE ESTUDO CONSIDERANDO INCERTEZA NAS PROPRIEDADES MECÂNICAS DAS LÂMINAS. ....	79
TABELA 4.4.2 - RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES ESTÁTICAS PARA OS CASOS DE ESTUDO 5.1 E 6.1. ....	82
TABELA 4.4.3 - RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES ESTÁTICAS PARA OS CASOS DE ESTUDO 5.2 E 6.2. ....	84
TABELA 4.4.4 - RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES ESTÁTICAS PARA OS CASOS DE ESTUDO 5.3 E 6.3. ....	86
TABELA 4.4.5 - RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES ESTÁTICAS PARA OS CASOS DE ESTUDO 5.1 E 6.1. ....	89
TABELA 4.4.6 - RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES ESTÁTICAS PARA OS CASOS DE ESTUDO 5.2 E 6.2. ....	91
TABELA 4.4.7 - RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES ESTÁTICAS PARA OS CASOS DE ESTUDO 5.3 E 6.3. ....	93





# Lista de Siglas e Nomenclatura

<b>FEM</b>	<i>Finite Element Method</i> (Método de Elementos Finitos)
<b>HSDT</b>	<i>High-Order Shear Deformation Theory</i> (Teoria de Deformação de Corte de Ordem Superior)
<b>FRC</b>	Fiber Reinforced Composites (Compósitos Reforçados por Fibras)
<b>FSDT</b>	<i>First-Order Shear Deformation Theory</i> (Teoria de Deformação de Corte de Primeira Ordem)
<b>MCS</b>	<i>Monte Carlo Simulation</i> (método de simulação de Monte Carlo)
<b>FFEM</b>	<i>Fuzzy Finite Element Method</i> (Método de Elementos Finitos Fuzzy)
<b>IFEM</b>	<i>Interval Finite Element Method</i> (Método de Elementos Finitos de Intervalos)
<b>FRF</b>	Função de Resposta em Frequência
<b><math>h</math></b>	Espessura total do laminado
<b><math>a</math></b>	Comprimento da maior aresta do laminado
<b><math>a/h</math></b>	Relação entre $a$ o comprimento da maior aresta do laminado e a sua espessura
<b><math>E_{ii}</math></b>	Módulo de Young
<b><math>G_{ij}</math></b>	Módulo de elasticidade transversal
<b><math>\nu_{ij}</math></b>	Coefficiente de Poisson
<b><math>\rho</math></b>	Massa Volúmica
<b><math>V_f</math></b>	Fração Volúmica
<b><math>u; v; w</math></b>	Graus de liberdade correspondentes ao deslocamento
<b><math>\phi_x; \phi_y</math></b>	Graus de liberdade correspondentes às rotações
<b><math>[\sigma]</math></b>	Vetor de tensões
<b><math>[\epsilon]</math></b>	Vetor de deformações generalizadas
<b><math>[Q]</math></b>	Matriz de coeficientes de rigidez elástica reduzidos da lâmina
<b><math>[\bar{Q}]</math></b>	Matriz de coeficientes de rigidez elástica reduzidos transformados da lâmina

$[A]$ ;  $[B]$ ;  $[D]$ ; Matrizes A,B,D de coeficientes da rigidez elástica do laminado

$\underline{u}; \bar{u}$  Limites inferiores e superiores do intervalo

$\tilde{x}$  Conjunto *fuzzy*

$\mu_{\tilde{x}}$  Valor da função de pertença para um dado elemento do conjunto *fuzzy*

$\alpha$   $\alpha$ -cut

$\bar{x}$  Valor médio de uma função de pertença (valor para  $\alpha = 1$ )

$\omega$  Frequência natural

$\bar{\omega}$  Frequência natural adimensionalizada

$w$  Deformada transversal máxima

$\bar{w}$  Deformada transversal máxima adimensionalizada

$q_0$  Valor carregamento uniformemente distribuído

# 1. Introdução

---

## 1.1 Motivação

Os materiais compósitos são utilizados de forma abrangente em diversas aplicações de várias áreas da engenharia, nomeadamente aquelas nas quais o peso estrutural é um critério importante. Trata-se do caso de diversas indústrias relacionadas com os transportes, como por exemplo a indústria aeronáutica, automóvel e ferroviária, nas quais a utilização de materiais compósitos em detrimento de materiais mais tradicionais, como o aço ou o alumínio, tem registado um crescimento significativo. De facto, na indústria aeronáutica, e mais concretamente na indústria de aviação comercial, tradicionalmente conservadora, verifica-se o aparecimento de aeronaves nas quais as taxas de utilização de materiais compósitos correspondem a aproximadamente 50% do peso estrutural total [1]. Como exemplos desta nova geração de aeronaves temos o Boeing 787 Dreamliner, em operação comercial desde 2011, e o Airbus A350, introduzido em 2015. Esta taxa de utilização de materiais compósitos é ainda mais significativa quando consideramos o seu crescimento nas últimas 3 décadas. O Airbus A310, introduzido em 1987, foi o primeiro avião comercial a ser projetado fazendo o uso de compósitos de forma extensiva. No entanto, apenas 10% do seu peso estrutural correspondia à utilização deste tipo de materiais. Na indústria automóvel prevê-se um crescimento da utilização de fibra de carbono em componentes estruturais no decorrer das próximas décadas. Apesar do custo da fibra de carbono ser ainda um fator impeditivo da sua utilização generalizada na indústria [1], surgiram nos últimos anos diversos exemplos da aplicação deste material na construção de chassis de alguns superdesportivos, e até mesmo de um veículo com uma produção considerável, o Alfa Romeo 4C. Assim, é possível constatar um rápido crescimento na utilização destes materiais, até mesmo em indústrias tradicionalmente consideradas conservadoras.

A opção de utilizar materiais compósitos em detrimento de materiais mais tradicionais, como o aço ou o alumínio, tipicamente utilizados no fabrico de estruturas, prende-se com algumas das propriedades vantajosas que lhes são características. Entre elas encontram-se a sua relação resistência mecânica / peso, elevada resistência à fadiga e corrosão e o facto de permitirem uma maior flexibilidade na definição das propriedades finais quando comparados com um material tradicional (devido ao seu comportamento anisotrópico) [1]. Na verdade, o facto das propriedades de um material compósito poderem ser ajustadas, durante a fase de projeto, às necessidades impostas pela aplicação, constitui uma das principais vantagens da sua utilização em estruturas, uma vez que isto permite uma otimização do desempenho das respostas aos carregamentos aplicados.

No entanto, apesar de todas as vantagens anteriormente referidas, os materiais compósitos apresentam uma elevada complexidade nas fases de projeto, fabrico e controlo de qualidade que condicionam a sua utilização. De facto, o fabrico de peças em material compósito envolve um elevado número de parâmetros de processo, muitos deles interdependentes e de difícil controlo [2]. Esta dificuldade em garantir uma elevada precisão nas diferentes fases do processo de fabrico, aliada à variabilidade inerente às propriedades dos materiais que constituem as fibras e a matriz de um compósito, levam a que peças construídas neste material apresentem frequentemente uma dispersão nos valores das suas propriedades mecânicas e/ou características geométricas globais. Para além disso, o facto de os materiais compósitos apresentarem anisotropia e heterogeneidade dificulta a realização de ensaios experimentais, o que pode contribuir para a falta de informação precisa acerca das suas propriedades mecânicas. Assim, devido às várias fontes de incerteza presentes nos processos de fabrico e controlo de qualidade, uma peça fabricada em material compósito poderá apresentar desvios significativos nas suas propriedades relativamente aos valores considerados durante a fase de projeto.

Na análise de estruturas em material compósito, com recurso ao método de elementos finitos (FEM), as propriedades do material, condições fronteira e carregamentos são normalmente considerados como possuindo valores exatos/determinísticos. Estes valores correspondem, no caso dos materiais, aos valores médios das propriedades, sendo fornecidos pelo fabricante. No entanto, na realidade, todos os parâmetros mencionados possuem algum grau de incerteza associado. Isto é especialmente relevante no caso das propriedades mecânicas de materiais compósitos, uma vez que, como referido anteriormente, a sua dispersão pode ser significativa. Isto significa que, ao realizar uma análise determinística das respostas estruturais a carregamentos estáticos e dinâmicos, se ignoram os valores máximos e mínimos das diferentes propriedades do material que, no entanto, se verificam e podem conduzir a respostas distintas das esperadas. A solução tipicamente aplicada para lidar com estas incertezas consiste na utilização de um coeficiente de segurança. Este coeficiente procura fazer face não apenas às incertezas associadas às propriedades do material, mas também às incertezas nos carregamentos e condições de serviço. Contudo, isto leva a que uma de duas situações possa ocorrer: sobredimensionamento da estrutura, o que resulta num custo acrescido e desnecessário; dimensionamento de uma estrutura com um elevado risco de falha, o que representa, claramente, uma situação a evitar [3],[4].

Apesar de ser possível reduzir alguma da incerteza associada ao projeto de estruturas em materiais compósitos através do desenvolvimento de métodos de fabrico mais avançados, modelos numéricos mais precisos ou ensaios experimentais mais adequados, a sua eliminação na totalidade é uma tarefa impossível, uma vez que esta resulta, em parte, da variabilidade naturalmente inerente a vários parâmetros. Para além disso, em muitas aplicações a utilização destes métodos de redução de incerteza não é exequível.

Verifica-se, portanto, que existe a necessidade de implementar ferramentas que permitam lidar, durante a fase de projeto, com as incertezas associadas a estruturas em material compósito. Para tal, é necessário realizar uma avaliação da propagação de incertezas, relacionando a variabilidade de parâmetros relevantes com os seus efeitos na dispersão das respostas estruturais. No entanto, a realização de ensaios experimentais em materiais compósitos é um processo complexo, que requer a utilização de um número considerável de amostras para obter os resultados pretendidos, o que representa custos consideráveis em muitas aplicações de engenharia [5]. Face a isto, a implantação de métodos numéricos que considerem as incertezas nos parâmetros do material e permitam caracterizar a gama de valores das respostas estruturais pode revelar-se extremamente útil, contribuindo para uma otimização do desempenho estrutural e uma minimização dos riscos associados.

## **1.2 Objetivos**

Esta dissertação tem como objetivo realizar a caracterização da variabilidade das respostas estáticas e dinâmicas de placas de material compósito laminado, considerando a incerteza que se encontra associada às propriedades destes materiais. Pretende-se, desta forma, implementar uma metodologia que permita realizar a simulação numérica de modelos de materiais compósitos e analisar a propagação de incertezas neste mesmo modelo computacional. Esta metodologia será baseada numa formulação de elementos finitos. Irá estabelecer-se uma comparação direta entre diferentes métodos de propagação de incerteza, avaliando a relação entre os resultados obtidos e o respetivo custo computacional. Para além disso, irá realizar-se uma análise que permita estabelecer quais as propriedades dos materiais compósitos laminados que apresentam uma maior incerteza resultante da variabilidade nos processos de fabrico, evidenciando que deverão ser tidos em conta na propagação de incerteza. Por último, pretende-se determinar, de entre os parâmetros do material sujeitos a incerteza, quais possuem um maior peso na descrição da variabilidade associada a determinadas variáveis de resposta do modelo.

## **1.3 Revisão Bibliográfica**

### **Modelação de Materiais Compósitos**

A crescente utilização de materiais compósitos em muitas aplicações de engenharia conduziu a uma intensa atividade de investigação, no decorrer das últimas décadas, que procura

desenvolver métodos de modelação adequados à caracterização do comportamento de materiais compósitos e das estruturas fabricadas com o recurso a estes materiais. A literatura que aborda esta temática é, portanto, vasta. No entanto, em [6] é realizada uma exposição da teoria relativa ao comportamento de placas e cascas em material compósito laminado, servindo este trabalho como uma forte base para o início do estudo desta temática. Neste livro são apresentados modelos matemáticos para descrição do comportamento de placas em compósito laminado, bem como soluções analíticas para problemas de flexão e vibração, entre outros, aplicados a placas e estruturas do tipo casca. Em [1] é realizada uma caracterização dos materiais compósitos reforçados por fibra, sendo também abordados diversos processos de fabrico deste tipo de materiais e os respetivos parâmetros de processo envolvidos.

### **Modelação de Estruturas Considerando Incerteza**

A análise dos efeitos da incerteza nas propriedades do material, condições fronteira e carregamentos aplicados no comportamento estrutural pode ser relevante em muitas aplicações e não apenas para estruturas fabricadas em material compósito. De facto, o aumento do poder computacional contribui para que a realização de modelação que considere os vários tipos de variabilidade se torne cada vez mais viável. Em [7] é realizada uma revisão dos diferentes métodos disponíveis para realizar a análise de propagação de incertezas em modelos numéricos. Os autores realizam uma distinção entre métodos probabilísticos e métodos não probabilísticos. Os primeiros correspondem a métodos nos quais a incerteza no valor dos parâmetros de modelação é caracterizada por meio de uma função de probabilidade e incluem, entre outros, a Simulação de Monte Carlo. Os segundos são tipicamente utilizados em casos nos quais a informação disponível é insuficiente para permitir descrever, recorrendo a uma função de distribuição de probabilidade, o comportamento de um determinado parâmetro sujeito a incerteza. Alguns exemplos destes métodos são o recurso à lógica *fuzzy* e à aritmética de intervalos. Em [8] são utilizados três métodos distintos, a simulação de Monte Carlo, método dos intervalos e a aritmética *fuzzy* para realizar uma avaliação da incerteza associada às tensões normais das barras de 3 modelos 2D de estruturas treliçadas. Como parâmetros de modelação, representando variáveis sujeitas a incerteza devido ao processo de fabrico, foram escolhidos o comprimento e o raio das barras. Considera-se também que valor da carga aplicada possui uma incerteza associada. Cada um dos parâmetros de modelação referidos poderá variar num intervalo em torno do valor médio assumido. Para avaliar a influência de cada um dos parâmetros na resposta da estrutura os autores procederam a uma análise de sensibilidade, para quatro situações distintas. Foi determinada a dispersão da gama de valores da tensão normal resultante para os 3 modelos e 4

situações. Os autores concluíram que o custo computacional da aplicação do método dos intervalos e da aritmética *fuzzy* é muito inferior ao da simulação de Monte-Carlo. Por outro lado, a implementação dos dois primeiros métodos exige um elevado dispêndio de tempo e a variação dos valores de tensão obtidos encontra-se sobrestimada.

### **Modelação de Materiais Compósitos Considerando Incerteza**

Relativamente à modelação considerando incerteza aplicada a estruturas em material compósito, em [9] estuda-se o efeito da incerteza em propriedades do material nas frequências naturais e deformada de uma placa de material compósito laminado, recorrendo à lógica Fuzzy. O autor utiliza um modelo de elementos finitos com integração da lógica Fuzzy, desenvolvido matematicamente com base na *Higher Shear Deformation Theory* (HSDT). É realizada a aplicação do modelo para diferentes casos de nº de laminas, orientação de fibras e relação comprimento/espessura de lamina. Em [10] é avaliada a incerteza na resposta não linear de um painel estrutural reforçado e com um furo no centro, fabricado integralmente em material compósito, sujeito a variação nas propriedades do material e geometria, recorrendo a um processo de 2 etapas. A primeira consiste no estabelecimento, através de uma análise de sensibilidade hierárquica, dos parâmetros ao nível do subcomponente, laminado, lamina e micromecânica, que possuem maior peso nas variáveis de resposta consideradas de interesse. Na segunda etapa assumiu-se que os parâmetros de maior importância são representados por variáveis *fuzzy*, e através de uma análise usando a teoria dos conjuntos *fuzzy* obtiveram-se as gamas de valores de resposta.

## **1.4 Estrutura da Dissertação**

O presente trabalho encontra-se dividido em cinco capítulos principais, que por sua vez se encontram divididos em vários subcapítulos distintos. No capítulo 1, que consiste num capítulo introdutório, procura-se realizar uma contextualização da problemática que se pretende abordar na presente dissertação. Assim, neste capítulo, é apresentada a motivação para o desenvolvimento desta dissertação, procurando demonstrar-se a importância da caracterização da influência da incerteza em propriedades de estruturas de material compósito laminado na variabilidade da resposta estrutural. Para além disso, são enunciados os objetivos do trabalho, sendo também apresentada uma revisão bibliográfica relativa à literatura que aborda o tema em estudo.

No segundo capítulo são apresentados fundamentos teóricos dos temas abordados no presente trabalho. Assim, referem-se alguns dos aspetos mais importantes do comportamento mecânico e

da análise de materiais compósitos laminados. São também discutidas algumas das fontes de incerteza em materiais compósitos e como estas podem afetar as suas propriedades mecânicas e geométricas à macroescala. Para além disso, apresentam-se alguns conceitos e definições fundamentais da lógica *fuzzy*. No final do capítulo são definidos diferentes tipos de incerteza, sendo também apresentados diferentes métodos para introduzir estas incertezas em modelos computacionais.

No terceiro capítulo procede-se a uma descrição do modelo de simulação numérica implementado no presente trabalho. Assim, é descrito o processo de implementação do método de elementos finitos *fuzzy* com recurso ao software ANSYS Mechanical APDL e MATLAB, bem como todos os parâmetros de modelação escolhidos para a análise de elementos finitos de estruturas de material compósito. São apresentados os resultados de uma análise de convergência, para definição da dimensão da malha adequada. Para além disso, são apresentados os resultados da validação de análises de elementos finitos estáticas e dinâmicas, realizada através da comparação com valores de formulações analíticas obtidos a partir da literatura.

No quarto capítulo são apresentados os resultados das simulações numéricas realizadas, para diferentes casos de estudo, utilizando o modelo desenvolvido. Nestes casos de estudo procura-se determinar a influência da incerteza em algumas propriedades mecânicas e geométricas do laminado na variabilidade da sua deformada máxima, frequência natural fundamental e funções de resposta em frequência. Analisa-se também a influência de parâmetros como a sequência de empilhamento ou a relação  $a/h$  (rácio entre o comprimento lateral mínimo e a espessura total do laminado).

No quinto capítulo são apresentadas as conclusões gerais do trabalho, bem como sugestões para futuros desenvolvimentos do tema aqui abordado.



## 2. Fundamentos Teóricos

Neste capítulo são apresentados conceitos e fundamentos teóricos necessários ao desenvolvimento do presente trabalho. Referem-se alguns dos aspetos mais importantes do comportamento mecânico e da análise de materiais compósitos laminados, bem como da incerteza que se encontra associada aos mesmos. Apresentam-se conceitos e definições fundamentais da lógica *fuzzy*. Realiza-se também uma definição dos diferentes tipos de incerteza, mencionando-se métodos para introduzir estas incertezas em modelos computacionais.

### 2.1 Materiais Compósitos

#### 2.1.1 Classificação de Materiais Compósitos

Um material compósito consiste na combinação de dois ou mais materiais distintos com o intuito de obter propriedades específicas, que não são passíveis de serem obtidas recorrendo a cada um dos materiais constituintes individualmente. Tipicamente, um dos materiais é utilizado como reforço, garantindo a resistência mecânica aos esforços aplicados. O outro componente de um material compósito designa-se por matriz. A matriz é responsável por manter o reforço na posição/orientação pretendidas, bem como garantir a sua proteção a danos resultantes do ambiente externo e funcionar como meio de transferência de cargas. Uma classificação típica de materiais compósitos, baseada nas características do material usado como reforço é apresentada na **Erro! A origem da referência não foi encontrada.**,

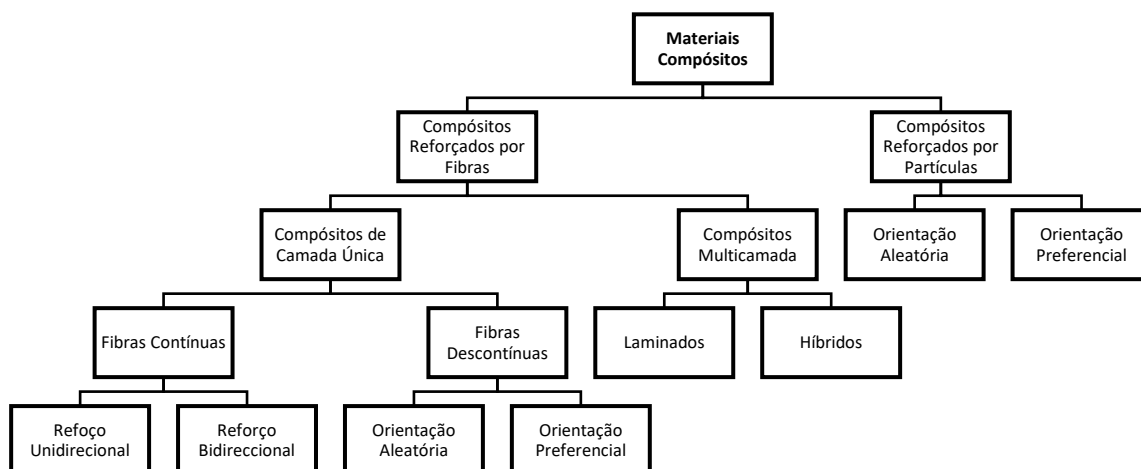


Figura 2.1 - Classificação de materiais compósitos com base no tipo de reforço [11].

As propriedades mecânicas de um material compósito encontram-se fortemente relacionadas com a geometria do material de reforço. No caso dos reforços de partículas, estas possuem tipicamente dimensões semelhantes em todas as direções, podendo a sua geometria ser esférica, cúbica ou ainda um outro tipo de geometria regular ou irregular. A orientação das partículas na matriz pode ser aleatória ou segundo uma determinada direção pretendida. Os reforços fibrosos caracterizam-se por possuir um comprimento superior ao diâmetro correspondente. A relação comprimento/diâmetro das fibras constitui, no entanto, um dos parâmetros diferenciadores entre tipos de compósitos reforçados por fibras. Assim, os reforços fibrosos contínuos resultam da utilização de fibras longas, com uma relação comprimento/diâmetro superior à dos reforços fibrosos descontínuos, que utilizam fibras mais curtas. A orientação das fibras descontínuas pode ser realizada aleatoriamente ou segundo uma direção preferencial. No caso dos reforços de fibras contínuas, estas podem encontrar-se dispostas na matriz paralelamente segundo uma determinada direção preferencial ou, em alternativa, em padrões bidirecionais ou multidirecionais. No caso dos padrões bidirecionais, as fibras são interlaçadas ou tecidas perpendicularmente entre si, sendo que nos padrões multidirecionais o ângulo formado entre as fibras varia relativamente a um ângulo base, de acordo com as propriedades direcionais pretendidas. Na Figura 2.2 apresentam-se algumas geometrias de material de reforço distintas.

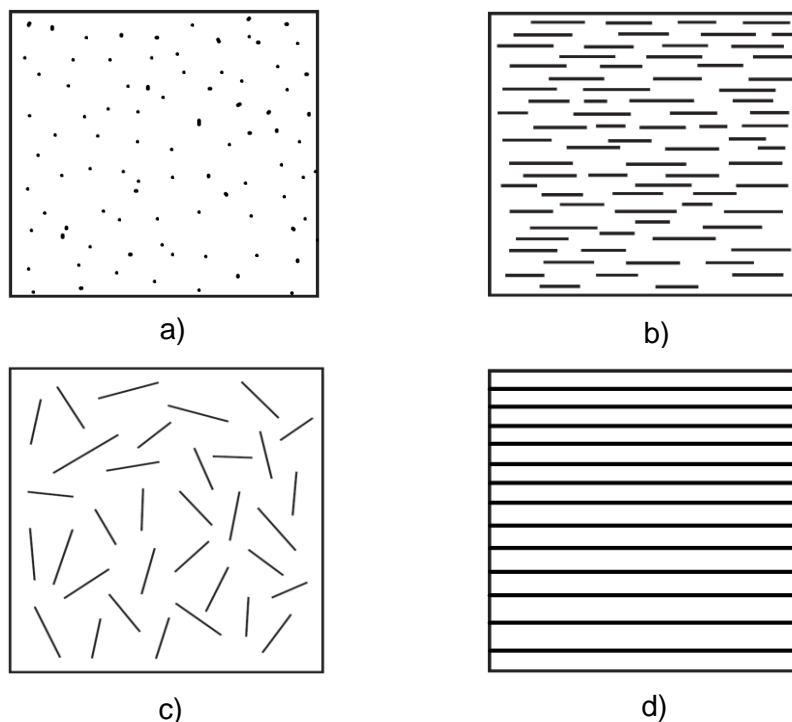


Figura 2.2 - Exemplos de reforços de materiais compósitos: **a)** partículas **b)** fibras unidirecionais descontínuas **c)** fibras descontínuas com orientação aleatória **d)** fibras unidirecionais contínuas.

Os compósitos multicamada são os mais frequentemente utilizados em aplicações estruturais, podendo ser classificados como laminados ou híbridos. Um compósito laminado é tipicamente obtido a partir da sobreposição de sucessivas camadas de materiais reforçados por fibras unidirecionais, numa sequência específica. Cada uma destas camadas individuais é designada por lâmina. A sobreposição de diversas laminas com diferentes ângulos de orientação das fibras irá condicionar as propriedades mecânicas finais do material. (11,12).

### **2.1.2 Materiais Compósitos Laminados Reforçados por Fibras (FRC)**

Os materiais compósitos laminados constituem a categoria de compósitos mais frequentemente utilizada em aplicações estruturais. Tal como referido anteriormente, um compósito laminado é obtido a partir de uma sobreposição de camadas individuais de material, sendo cada uma destas unidades designada por lâmina. Uma lâmina é constituída por um elevado número de fibras (tipicamente orientadas paralelamente segundo uma direção pretendida) envolvidas por uma matriz. As matrizes podem ser constituídas por um material metálico, polimérico ou cerâmico. As fibras podem também ser construídas em diversos tipos de materiais, de acordo com a aplicação em causa.

O comportamento mecânico de uma lâmina caracteriza-se por uma elevada resistência mecânica aos esforços aplicados na direção das fibras. No entanto, a resistência aos esforços aplicados perpendicularmente às fibras é bastante reduzida. Assim, a construção de um FRC envolve geralmente a sobreposição de lâminas com fibras orientadas em direções distintas. Este esquema construtivo garante uma resistência da estrutura a esforços aplicados em mais do que uma direção.

### **2.1.3 Modelação do Comportamento de FRC**

Os materiais tradicionalmente utilizados em aplicações estruturais, como é o caso de metais como o aço e o alumínio, caracterizam-se por possuírem uma estrutura aproximadamente homogénea e apresentarem comportamento próximo de um comportamento isotrópico. A classificação de um material como homogéneo indica que as suas propriedades são iguais em qualquer ponto, sendo que a isotropia define que as propriedades do material são constantes independentemente da direção. Assim, no estudo da mecânica deste tipo de materiais é frequente assumir-se isotropia e homogeneidade, o que permite simplificar a análise do seu comportamento. No entanto, no caso dos FRC, verifica-se que o material é não-homogéneo e não isotrópico [1]. Isto implica que a análise da mecânica de um material compósito seja mais complexa do que a aplicada a um material convencional.

A análise do comportamento mecânico de um material compósito pode ser realizada a diferentes escalas, da microescala à macroescala. No caso da micromecânica, a análise é realizada tendo por base o comportamento e as interações dos materiais constituintes (fibras e matriz) a um nível microscópico. A análise a esta escala é útil para estabelecer as propriedades mecânicas de uma lâmina e determinar os mecanismos de falha do material, ao nível dos materiais constituintes e da sua interface. A análise macromecânica é aplicada ao estudo do comportamento mecânico de lâminas, laminados e estruturas em material compósito. Neste tipo de análise assume-se que o material compósito é homogéneo, sendo as suas propriedades aparentes obtidas a partir da homogenização das propriedades dos materiais constituintes.

Devido às elevadas exigências em termos computacionais que a utilização da micromecânica acarreta, a modelação de estruturas compósitas complexas a esta escala não é, geralmente, exequível. Em alternativa, a análise à macroescala revela-se menos exigente computacionalmente, uma vez que se baseia numa simplificação da composição estrutural do material, considerando-o como sendo homogéneo. A macromecânica apresenta como principal desvantagem o facto de não fornecer informação relativamente à interação entre os materiais constituintes e, consequentemente, da sua contribuição para os mecanismos de falha de uma lâmina ou laminado.

### **2.1.3.1 Lei Constitutiva da Lâmina**

A lei constitutiva da lâmina explicita uma formulação que permite descrever a relação entre tensões e deformações numa lâmina de um compósito laminado. A validade desta formulação assenta nos dois seguintes pressupostos [6]:

1. Uma lâmina consiste num meio contínuo, não existindo quaisquer vazios ou impurezas.
2. A lâmina apresenta um comportamento linear elástico.

O segundo pressuposto considerado garante a validade da aplicação da Lei de Hooke. Segundo a Lei de Hooke, para um material anisotrópico, este possui uma matriz de coeficientes de rigidez elástica com 21 constantes independentes. No entanto, nos casos em que as propriedades mecânicas de um material possuem um ou mais planos de simetria, este número de constantes pode ser reduzido. Um material ortotrópico possui três planos de simetria mutuamente ortogonais, o que resulta numa redução para 9 do número de constantes independentes da matriz de rigidez. Para esta situação, considerando que os planos coordenados são paralelos aos três planos ortogonais de simetria, teremos a seguinte relação tensão-deformação [6],

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

Sendo que  $C_{ij}$  corresponde ao coeficiente de rigidez,  $\sigma_j$  à tensão e  $\varepsilon_j$  à deformação.

Uma lâmina reforçada por fibras unidirecionais pode ser considerada como sendo um material ortotrópico, cujos planos de simetria são paralelos e perpendiculares à direção das fibras. Nesta situação, o eixo coordenado  $x_1$  é paralelo à direção das fibras, o eixo  $x_2$  perpendicular às fibras no plano da lâmina e o eixo  $x_3$  perpendicular ao plano da lâmina, de acordo com a Figura 2.3,

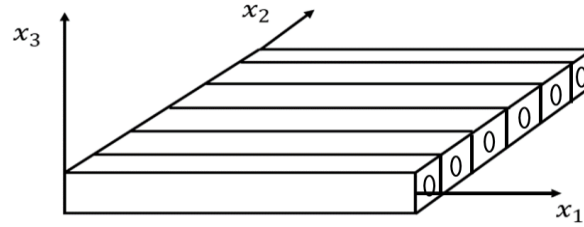


Figura 2.3 - Lâmina de fibras unidirecionais contínuas e o respetivo referencial do material ( $x_1, x_2, x_3$ ).

As propriedades mecânicas de uma lâmina ortotrópica podem ser obtidas a partir de ensaios experimentais ou através de uma abordagem teórica, baseada numa análise micromecânica. Esta abordagem teórica permite determinar os módulos de elasticidade e os coeficientes de Poisson de uma lâmina a partir das frações volúmicas e propriedades mecânicas dos seus materiais constituintes [6],

$$\begin{aligned} E_1 &= E_f V_f + E_m V_m ; \quad v_{12} = v_f V_f + v_m V_m ; \quad E_2 = \frac{E_f E_m}{E_f V_m + E_m V_f} \\ G_{12} &= \frac{G_f G_m}{G_f V_m + G_m V_f} ; \quad G_f = \frac{E_f}{2(1 + v_f)} ; \quad G_m = \frac{E_m}{2(1 + v_m)} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Sendo  $E_1$  o módulo de elasticidade longitudinal,  $E_2$  o módulo de elasticidade transversal,  $v_{12}$  o coeficiente de Poisson no plano  $x_1 x_2$ ,  $G_{12}$  o módulo de distorção no plano  $x_1 x_2$ .

Numa situação de estado plano de tensão considera-se que as tensões transversais a um determinado plano são negligenciáveis. Os compósitos laminados são geralmente finos, o que

implica que se encontram sujeitos a um estado plano de tensão [6]. Assim, para a lâmina representada na Figura 2.3, isto corresponde a considerar nulas as tensões transversais ao plano  $x_1x_2$ , ou seja,  $\sigma_{33}$  [ $\sigma_3$ ],  $\sigma_{13}$  [ $\sigma_4$ ] e  $\sigma_{23}$  [ $\sigma_5$ ]. No entanto, uma vez que os FRC possuem uma resistência mecânica consideravelmente mais baixa na direção transversal ao plano das fibras, mesmo estas tensões reduzidas poderão conduzir à falha do laminado [6]. Assim, as tensões de corte transversais ( $\sigma_{13}$  e  $\sigma_{23}$ ) não são consideradas nulas nas diferentes teorias de deformação de corte (*Shear deformation Theories*) utilizadas na modelação do comportamento de compósitos laminados. Desta forma, apenas a tensão normal ao plano das fibras ( $\sigma_{33}$ ) é considerada nula. De acordo com estes pressupostos podemos reduzir a equação constitutiva da lâmina a,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

Sendo que os coeficientes de rigidez reduzidos para um estado plano de tensão ( $Q_{ij}$ ) se relacionam da seguinte forma com as propriedades mecânicas da lâmina [6],

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} ; Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} ; Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{44} = G_{23} ; Q_{55} = G_{13} ; Q_{66} = G_{12} \quad (2.4)$$

As expressões apresentadas anteriormente referem-se a um sistema de eixos coordenados que coincide com os eixos principais das propriedades do material, conforme a Figura 2.3. No entanto, os compósitos laminados são geralmente compostos por lâminas com diferentes ângulos de orientação das fibras e, conseqüentemente, diferentes orientações dos eixos principais das propriedades do material. Assim, para realizar a análise de um compósito laminado, será necessário definir as propriedades de cada lâmina relativamente a um sistema de eixos definido para o laminado. A transformação de coordenadas do referencial local de uma lâmina para um referencial global de um laminado é obtida por [6],

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^2 \theta + Q_{55} \sin^2 \theta \\
\bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \cos \theta \sin \theta \\
\bar{Q}_{55} &= Q_{55} \cos^2 \theta + Q_{44} \sin^2 \theta
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Correspondendo  $\theta$  ao ângulo entre o eixo  $x$  e o eixo  $x_1$  medido no sentido positivo (de acordo com o apresentado na Figura 2.4), ou seja, no caso de um laminado reforçado por fibras unidirecionais, ao ângulo entre a direção das fibras e o referencial global, de acordo com a Figura 2.4.

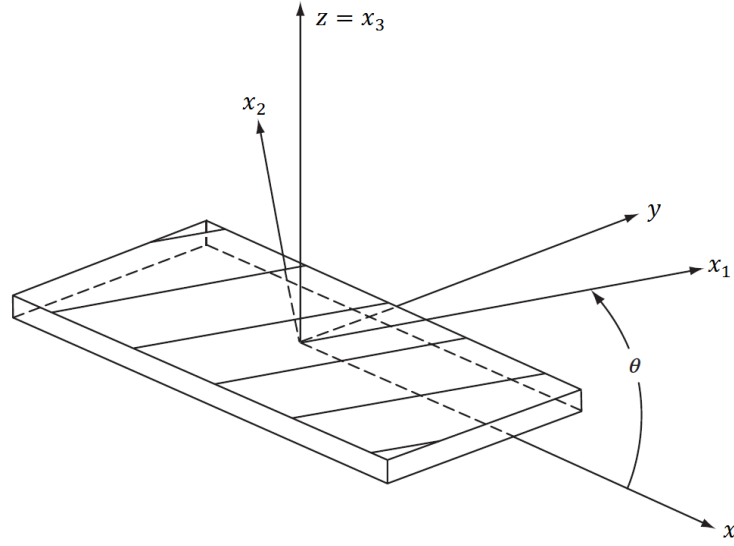


Figura 2.4 - Lâmina com o referencial do laminado (global) e o referencial do material (local). Adaptado de [1].

Assim, a equação constitutiva de uma lâmina ortotrópica em estado plano de tensão, transformada para um referencial global  $xyz$ , será dada por [6],

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & Q & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & Q & 0 & \bar{Q}_{26} \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{54} & \bar{Q}_{55} & Q \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & 0 & Q & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.6}$$

### 2.1.3.2 Teorias de Laminados

A análise de compósitos laminados é frequentemente realizada com recurso a teorias de camada única equivalente. Nestas teorias, é realizada uma equivalência entre o compósito laminado heterogêneo e uma camada única equivalente que apresenta um comportamento constitutivo

complexo. Isto permite reduzir a dimensão do problema, de três dimensões para apenas duas. Para tal, são assumidos alguns pressupostos relativamente aos campos de deslocamentos e/ou às tensões ao longo da espessura do laminado [6].

### Teoria de Deformação de Corte de Primeira Ordem (FSDT)

A FSDT assenta no pressuposto de que linhas perpendiculares ao plano médio do material antes da deformação poderão deixar de o ser após a deformação do compósito. Admite-se assim a possibilidade de rotação das linhas devido à deformação, sendo que estas se mantêm, no entanto, direitas. Isto deve-se às deformações de corte  $\varepsilon_{xz}$  e  $\varepsilon_{yz}$ . Para além disso, admite-se que a variação da espessura devido à deformação é negligenciável. Estes pressupostos são válidos quando o rácio  $a/h$  entre a dimensão lateral mínima ( $a$ ) e a espessura total ( $h$ ) é superior a 10 [13]. Os compósitos laminados utilizados na grande maioria das aplicações caracterizam-se por possuir uma espessura consideravelmente inferior às dimensões planares. Assim, o rácio dimensão lateral-espessura ( $a/h$ ) de um laminado é tipicamente superior a 20, pelo que a FSDT representa uma aproximação adequada [6]. O campo de deslocamentos assumido na FSDT é o seguinte [6],

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \phi_x ; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \phi_y \quad (2.7)$$

Sendo que  $u_0$ ,  $v_0$  e  $w_0$  correspondem aos deslocamentos, segundo as direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , de um ponto material localizado no plano médio de um laminado.  $\phi_x$  e  $\phi_y$  representam a rotação das linhas inicialmente perpendiculares ao plano médio em torno do eixo  $y$  e  $x$ , respetivamente (Figura 2.5).

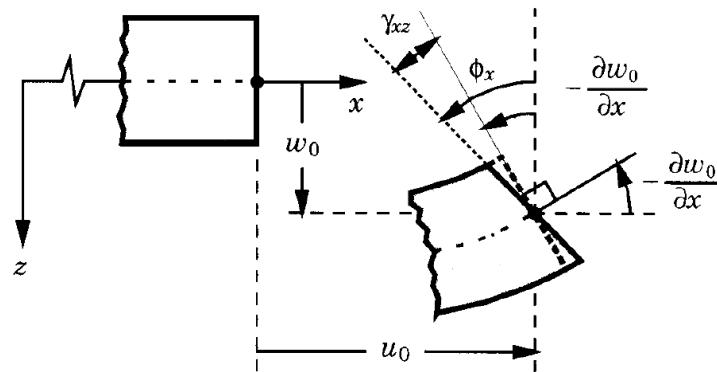


Figura 2.5 - Geometria não-deformada e deformada do bordo de uma placa, assumindo as condições da FSDT [6].



As deformações associadas ao campo de deslocamentos apresentado anteriormente são obtidas da seguinte forma [6],

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\
\gamma_{xy} &= \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + z \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y; \quad \varepsilon_{zz} = 0
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Daqui resulta que as extensões  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  e a deformação de corte  $\gamma_{xy}$  possuem uma variação linear ao longo da espessura do laminado, sendo que as deformações de corte  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  são constantes ao longo desta mesma espessura. Uma vez que estas deformações são constantes, os valores de tensão manter-se-ão, também, constantes. No entanto, isto não representa uma aproximação aceitável da realidade uma vez que, em vigas e placas de compósito laminado, estas tensões de corte variam pelo menos quadraticamente ao longo da espessura [6].

Para lidar com esta diferença entre o estado de tensão real e o estado de tensão previsto pela FSDT é introduzido um fator de correção ao corte (*shear correction coefficient*,  $K$ ). Este fator  $K$  é calculado considerando que a energia de deformação devido às tensões de corte é igual à energia de deformação prevista pela teoria de elasticidade tridimensional. Para o caso de uma viga de secção transversal retangular e de material isotrópico e homogéneo, o fator  $K$  tem um valor de 5/6. O fator de correção para um laminado irá depender das propriedades da lâmina e da sequência de empilhamento. No entanto, é frequente admitir-se um valor de 5/6 mesmo no caso de laminados, como forma de simplificar o estudo realizado [6].

### 2.1.3.3 Equações Constitutivas do Laminado

As equações constitutivas de um laminado permitem relacionar forças e momentos aplicados com as deformações generalizadas. Para tal, é necessário definir as seguintes matrizes: A – rigidez de membrana (*extensional stiffness*), D - flexão (*bending stiffness*) e B – acoplamento da rigidez de membrana-flexão (*bending-extensional coupling stiffness*). As deformações da equação (2.9) podem ser divididas em 2 componentes, nomeadamente em deformações devido ao efeito de membrana (*membrane strains*,  $\varepsilon^{(0)}$ ) e deformações devido a flexão (*flexural strains*,  $\varepsilon^{(1)}$ ), da seguinte forma [6],

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{yz}^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

A relação entre forças e momentos resultantes por unidade de comprimento e a deformação no laminado é dada pelas seguintes equações [6],

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

As matrizes de coeficientes de rigidez elástica  $A$ ,  $B$  e  $D$ , para um laminado ortotrópico, podem ser definidas em função dos coeficientes de rigidez das lâminas ( $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ ), definidos na secção 2.1.3.1, da seguinte forma [6],

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1} - z_k); \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^2 - z_k^2); \quad D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3) \quad (2.11)$$

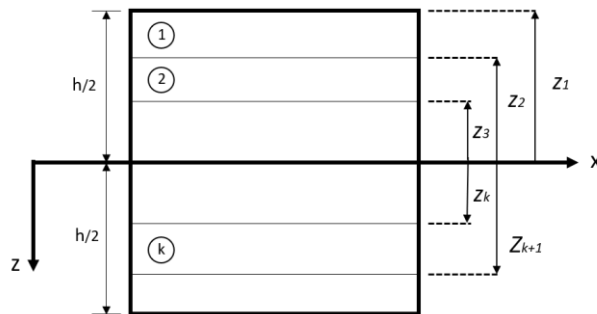


Figura 2.6 - Numeração das lâminas de um composto laminado. Adaptado de [6].

Sendo  $z_k$  a distância do plano médio do laminado à superfície superior da lâmina  $k$  e  $z_{k+1}$  a distância do plano médio do laminado à superfície inferior da lâmina  $k$ .

#### 2.1.4 Sequência de Empilhamento

A sequência de empilhamento é um parâmetro de elevada importância na construção de compósitos laminados, uma vez que, tal como os coeficientes de rigidez dos materiais constituintes e a espessura da camada, influencia os valores das matrizes de rigidez do laminado [6]. Assim, as interações entre lâminas contíguas irão depender da sequência de empilhamento. Para além disso, uma das vantagens da utilização de estruturas de compósito laminado consiste na possibilidade de adaptar as suas propriedades por forma a garantir uma resistência mecânica ideal a esforços aplicados em determinadas direções preferenciais. Isto pode ser conseguido através da escolha de uma sequência de empilhamento adequada.

A notação tipicamente utilizada para descrever a sequência de empilhamento de um laminado é do tipo  $[\alpha/\beta/\gamma/\delta]$ , na qual  $\alpha$  representa a orientação das fibras da primeira lâmina,  $\beta$  a orientação das fibras da segunda lâmina e assim sucessivamente. As lâminas são contadas na direção positiva do eixo  $z$ , pelo que a primeira lâmina corresponde à face superior do laminado. Na notação seguida neste trabalho considera-se que, se não for mencionado nada em contrário, todas as camadas do laminado possuem a mesma espessura e são fabricadas no mesmo material.

Alguns tipos de laminados frequentemente utilizados podem ser classificados de acordo as respetivas sequências de empilhamento [1]:

- Laminado Unidirecional. O ângulo de orientação das fibras é igual em todas as lâminas.
- Laminado Angular (*angle-ply*). Orientação das fibras de lâminas sucessivas alterna entre  $+\theta$  e  $-\theta$  (por exemplo,  $[\theta/-\theta/\theta/-\theta]$ ) para valores diferentes de  $0^\circ$  ou  $90^\circ$ . Existe apenas um valor de  $\theta$  no laminado.
- Laminado Cruzado (*cross-ply*). Os ângulos de orientação das fibras em camadas sucessivas alternam entre dois valores, de  $0^\circ$  e  $90^\circ$  (por exemplo,  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ )
- Laminado Simétrico. Os ângulos de orientação das fibras das lâminas são simétricos em relação ao plano médio do laminado. Isto implica que, por cada lâmina acima do plano médio, existe uma lâmina idêntica abaixo deste plano e a igual distância deste. Todos os pares de lâminas são do mesmo material e espessura. Na notação tipicamente utilizada, uma sequência de empilhamento simétrica como por exemplo  $[0/+45/90/90/+45/0]$  é abreviada para  $[0/45/90]_S$ .
- Laminado Antissimétricos. A orientação das fibras é antissimétrica relativamente ao plano médio do laminado (por exemplo,  $[\theta/-\theta/\theta/-\theta]$ ). Isto implica que, por cada lâmina acima do plano médio com fibras orientadas num ângulo  $\theta$ , existe uma lâmina

abaixo do plano médio, e a igual distância deste, com um ângulo de orientação de fibras de  $-\theta$ . Todos os pares de lâminas são do mesmo material e espessura

- **Laminados Equilibrados.** Um laminado diz-se equilibrado se, para todas as lâminas com fibras orientadas num ângulo  $\theta$ , existe uma lâmina correspondente orientada segundo  $-\theta$ . Todos os pares de lâminas são do mesmo material e espessura, sendo que o laminado pode ou não ser simétrico.
- **Laminado Quasi-Isotrópico.** Estes laminados são constituídos por três ou mais lâminas que apresentam todas um ângulo igual entre si. Assim, se tivermos um número total de lâminas  $n$ , verifica-se um incremento no ângulo das fibras de  $\pi/n$  entre lâminas adjacentes. Alguns exemplos de laminados quasi-isotrópicos são  $[+60/0/-60]$  e  $[+45/0/-45/90]$ .

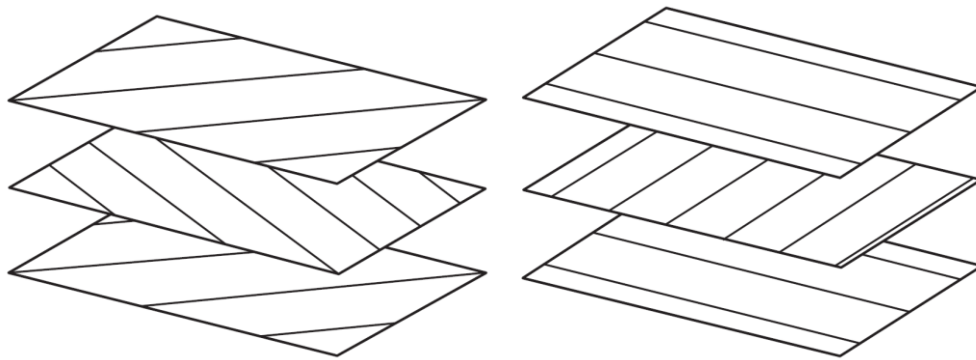


Figura 2.7 - Laminado angular (angle-ply) e laminado cruzado (cross-ply).

Para o caso dos laminados simétricos, devido à simetria dos coeficientes de rigidez das lâminas ( $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ ), distância  $z_k$  e espessura das camadas  $h_k$  a matriz de acoplamento flexão-membrana longitudinal  $\mathbf{B}$  é igual a zero. A eliminação deste acoplamento flexão-tração permite simplificar as equações, o que facilita a análise, bem como obter laminados com um comportamento mais previsível. Assim, um laminado simétrico, ao sofrer variações de temperatura (como é por exemplo o caso do arrefecimento após o processo de cura) ou ser tracionado não apresenta distorções na sua geometria [6]. Apesar dos laminados simétricos apresentarem vantagens do ponto de vista analítico, poderão não ser adequados para satisfazer algumas necessidades de projeto específicas. Assim, por exemplo no caso de pás de turbina torcidas ou escudos de calor, recorre-se a sequências de empilhamento antissimétricas [6]. Os laminados quasi-isotrópicos são construídos utilizando sequências de empilhamento que permitam obter um comportamento elástico isotrópico no plano  $xy$ . No entanto, para solicitações em direções que não sejam paralelas às lâminas o comportamento mecânico do material pode ser bastante diferente de um comportamento isotrópico [1].

### **2.1.5 Incerteza em Materiais Compósitos Laminados**

A incerteza é um aspeto que dever ser tomado em conta na utilização de materiais compósitos em aplicações estruturais, devido à variabilidade inerente a este tipo de materiais. Esta incerteza resulta, em primeiro lugar, da maior complexidade associada à natureza heterogénea dos materiais compósitos. Para além disso, a elevada complexidade dos processos de fabrico, processamento/montagem e controlo de qualidade de estruturas em material compósito contribui significativamente para a incerteza nas suas propriedades mecânicas e/ou geométricas finais [14]. Assim, uma elevada percentagem dos pré-impregnados fabricados atualmente apresentam variabilidade significativa ao nível da massa de fibras por unidade de área e do conteúdo de resina, bem como um nível de desalinhamento das fibras considerável. Verifica-se que os pré-impregnados possuem uma dispersão de propriedades que abrange todo o espectro das tolerâncias admitidas pelo fabricante, com um número significativo de medições a ultrapassarem estes limites [15].

A incertezas associada ao comportamento mecânico de estruturas pode ser, de forma geral, classificada de acordo com a sua origem. Assim, poderemos ter uma classificação da origem da incerteza que consiste em quatro classes [16],

1. Variabilidade nas condições ambientais e operacionais. Inclui as incertezas ao nível da temperatura, pressão, humidade, propriedades dos materiais, etc.
2. Tolerâncias e precisão do processo produtivo. As características consideradas em fase de projeto são atingidas apenas até um certo grau, uma vez que os processos de fabrico possuem também incerteza que induz variabilidade nas propriedades do produto final.
3. Imprecisões na avaliação da resposta e desempenho do sistema. Este tipo de incerteza inclui os erros de medição e as aproximações realizadas devido ao uso de modelos durante o projeto.
4. Incertezas associadas aos constrangimentos ou condições fronteira do problema.

A influência da incerteza no processo produtivo de materiais compósitos na variabilidade das suas propriedades é complexa, pelo que se torna difícil de quantificar na totalidade. No entanto, alguns fatores que contribuem significativamente para esta variabilidade são as frações volúmicas das fibras e da matriz, a cura apropriada, vazios e porosidades na matriz, o alinhamento e curvatura das fibras, a coesão da ligação entre as fibras e a matriz, o conteúdo de resina, efeitos térmicos, etc. A incerteza associada a todos estes parâmetros propaga-se até à macroescala, refletindo-se na variabilidade das propriedades mecânicas do material, o que por sua vez irá provocar variabilidade nas respostas estruturais [4].

Desta forma, é possível definir três causas principais para a incerteza resultante dos processos de fabrico [2]:

- Variações na orientação e secção transversal das fibras, normalmente originadas durante a produção, manuseamento ou armazenamento dos pré-impregnados ou reforços.
- Variações ao nível das propriedades mecânicas dos materiais que constituem a matriz, devido a variações nas condições de armazenamento ou na composição da resina.
- Variações nos parâmetros de processo das várias etapas do fabrico ou nas condições ambientais.

Relativamente à incerteza nos pré-impregnados ou materiais usados como reforço, esta encontra-se tipicamente associada à existência de encurvadura nas fibras, a desalinhamentos das fibras, a variações nas dimensões e formas das fibras, à distribuição não uniforme das fibras e a variações no conteúdo de resina, sendo originada durante o processo de produção, manuseamento ou armazenamento. A título de exemplo, o alinhamento e a rigidez dos rolos utilizados durante a produção dos pré-impregnados pode conduzir a variações no conteúdo de resina, sendo que o enrolamento dos pré-impregnados em bobinas para armazenamento pode levar ao seu enrugamento, provocando ondulação e desalinhamento das fibras (2,17). A análise de algumas amostras de pré-impregnados realizada em [15] revelou que esta ondulação das fibras, quando considerada numa superfície plana, possui um comprimento de onda de aproximadamente 3 mm e um desalinhamento máximo no ângulo de orientação das fibras de  $3.8^\circ$ . A variabilidade na orientação das fibras pode ser descrita por uma distribuição normal [2].

Tipicamente, assume-se que as propriedades de um laminado plano são representativas das propriedades do componente real. No entanto, no que diz respeito ao processo de moldagem das camadas de pré-impregnados durante o fabrico de peças que possuem curvaturas, e mais significativamente nos casos de peças com curvaturas em duas direções distintas (como esferas ou cúpulas), são introduzidas incertezas adicionais que podem levar a variabilidade adicional no comportamento mecânico do componente [17]. Considerando o caso de uma curvatura simples, teremos fibras contínuas inicialmente direitas que são submetidas durante o processo de fabrico a um condicionamento, por forma a serem moldadas de acordo com um determinado raio de curvatura. Assim, as fibras interiores ficarão sujeitas a compressão, o que leva à formação de regiões de fibras com encurvaduras. É de referir que este encurvamento das fibras não ocorre devido a erros no processo de fabrico, sendo apenas uma consequência da geometria da peça que se pretende fabricar [17]. No caso de curvaturas duplas, as elevadas deformações de corte que ocorrem durante o processo de fabrico produzem um efeito significativo na espessura e na fração volúmica local das fibras. Assim, as regiões sujeitas a maior deformação irão apresentar uma fração volúmica de fibras superior [2].

O processo de cura de materiais compósitos é um processo de condicionamento térmico e mecânico, por meio do qual é realizada a polimerização (endurecimento) da resina epóxi. Devido a este processo, são introduzidas durante esta fase do fabrico diversas incertezas devido a variações nas propriedades do material e das ferramentas, assim como nas condições ambientais externas e nas condições fronteira do processo [2].

As propriedades termomecânicas dos materiais podem apresentar incerteza que afeta o processo de cura. Isto deve-se tanto à incerteza inerente às propriedades dos materiais constituintes como a incertezas introduzidas nas etapas anteriores do processo de fabrico. Assim, incerteza ao nível da orientação e da fração volúmica das fibras conduz a variabilidade na condutividade térmica do material. Para além disso, os coeficientes de expansão térmica do material são afetados por variações nos coeficientes de expansão térmica dos materiais constituintes, bem como por variações nas suas frações volúmicas e pelo desalinhamento das fibras [2]. Ao nível das condições ambientais/fronteira, existe incerteza ao nível da temperatura ambiente, humidade, transferência de calor por convecção, pressão e temperatura que ocorrem durante o processo de cura [2].

Todas estas fontes de incerteza irão contribuir para a possibilidade de ocorrência de alguns efeitos indesejados, que influenciam fortemente a variabilidade das propriedades da peça final. Alguns destes efeitos são o aparecimento de tensões residuais, a cura excessiva ou insuficiente e o aparecimento de vazios induzidos pelo processo de cura [2]. A contração da resina devido ao processo de cura, existência de zonas ricas em resina e a ocorrência de expansão térmica anisotrópica são os principais fatores que conduzem ao aparecimento de tensões residuais no componente. Quando a peça é removida do molde estas tensões contribuem para a existência de defeitos a nível dimensional [18]. Isto ocorre de forma especialmente relevante no caso de peças que apresentam cantos pronunciados, uma vez que se verifica uma redução dos seus ângulos de canto (*spring-in*) [17]. Para além disso, as tensões residuais podem conduzir ainda a delaminação (um dos modos de falha mais comuns em materiais compósitos laminados) ou ao aparecimento de fissuras no componente [2]. Outra fonte de distorções geométricas e tensões residuais numa peça de material compósito passa pela interação entre os moldes e o compósito na realização de cura a elevadas temperaturas, devido a diferenças nos respetivos coeficientes de expansão térmica [18].

Em [15] os autores apresentam uma taxonomia de defeitos que ocorrem em componentes fabricados em material compósito, com o objetivo de estabelecer um esquema que permita colocar em evidência os principais fatores que contribuem de forma adversa para o seu desempenho. Na Figura 2.8 reproduz-se uma adaptação desta taxonomia.

Foram aqui referidos alguns exemplos de como a existência de incerteza ao nível das propriedades dos materiais constituintes e dos processos de fabrico de componentes em material compósito

pode contribuir para a dispersão das suas propriedades mecânicas, e para a consequente variabilidade em termos de resposta estrutural. Procurou-se também demonstrar que a elevada interdependência que existe entre as variáveis envolvidas no processo produtivo dificulta a quantificação total das fontes de incerteza associadas a uma peça em material compósito. No entanto, por se tratar de um tema tão complexo, existem fatores adicionais que contribuem para a ocorrência de incerteza. Estes fatores encontram-se, por exemplo, relacionados com o tipo de processo de fabrico escolhido. Contudo, no âmbito deste trabalho, existirá um foco na análise dos efeitos da propagação de incerteza relacionada com as propriedades dos materiais constituintes, com os erros e desalinhamentos na orientação das fibras e com a incerteza da espessura laminar, resultante de variabilidade no processo de cura.

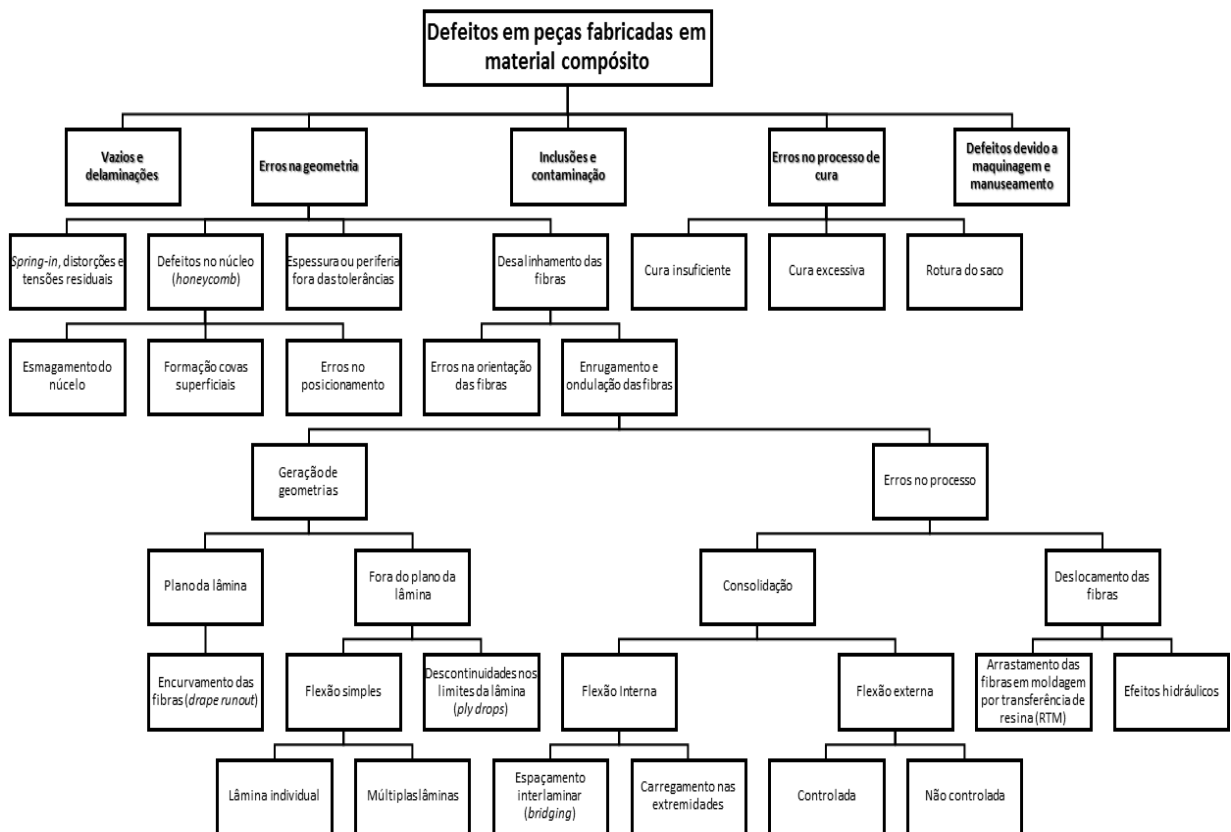


Figura 2.8 - Taxonomia de defeitos em materiais compósitos. Adaptado de [15].



## 2.2 Lógica Fuzzy

Nesta secção são apresentados alguns conceitos e definições relativos à lógica fuzzy relevantes para o presente estudo. Esta teoria, introduzida por Zadeh em 1965 [19], estabelece uma estrutura de conceitos matemáticos na qual problemas que não se encontram definidos de forma exata (ou seja, que possuem algum grau de vaguidade associado) podem ser estudados de forma rigorosa [20]. Representa uma alternativa aos métodos probabilísticos como método de análise de problemas nos quais se considera incerteza. A teoria possui uma ampla variedade de aplicações em diferentes áreas, nomeadamente em problemas de análise estática ou dinâmica, representando uma ferramenta útil para lidar com incertezas em parâmetros como tolerâncias dimensionais, propriedades mecânica do material, condições fronteira, etc.

### 2.2.1 Definição de um conjunto Fuzzy

A teoria de conjuntos *fuzzy* pode ser considerada com uma extensão da definição de conjunto clássica. Na teoria clássica de conjuntos, a pertença de um elemento a um dado conjunto está condicionada a duas possibilidades, sendo elas a pertença ou a não-pertença (ou seja, a uma possibilidade binária de valor 0 ou 1). No entanto, na teoria de conjuntos *fuzzy*, cada elemento de um conjunto possui um grau de pertença associado (grau de *membership*), que é expresso por uma determinada função de pertença (ou função de *membership*,  $\mu_{\tilde{x}}$ ). Assim, cada elemento de um conjunto *fuzzy* possui um grau de pertença que varia no intervalo de  $[0,1]$ , sendo este grau de pertença definido por uma função de pertença  $\mu_{\tilde{x}}(x)$ . Um conjunto *fuzzy*  $\tilde{x}$  cujas funções de pertença são representadas por  $\mu_{\tilde{x}}(x)$ , para todo o  $x$  pertencente ao domínio  $X$ , é definido por [21],

$$\tilde{x} = \{(x, \mu_{\tilde{x}}(x)) \mid (x \in X), (\mu_{\tilde{x}}(x) \in [0,1])\} \quad (2.12)$$

### 2.2.2 Definição de intervalo

Podemos definir um intervalo  $U$  no conjunto de números reais  $\mathbb{R}$  da seguinte forma,

$$U = [\underline{u} \ \overline{u}] = \{u \in \mathbb{R}: \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\} \quad (2.13)$$

Na notação apresentada  $\underline{u}$  corresponde ao extremo inferior do intervalo, sendo que  $\overline{u}$  corresponde ao extremo superior.

### 2.2.3 Definição de $\alpha$ -cut de um conjunto Fuzzy

O  $\alpha$ -cut  $A_\alpha$  de um conjunto *fuzzy*  $\tilde{A}$  corresponde ao conjunto exato de todos os elementos  $x \in X$  que possuem um grau de pertença ao conjunto *fuzzy* de pelo menos  $\alpha$ . O valor de  $\alpha$  pertence ao intervalo  $[0,1]$ . A definição de  $\alpha$ -cut é dada pela seguinte equação [21],

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} \quad (2.14)$$

A representação gráfica de dois  $\alpha$ -cut de um determinado conjunto *fuzzy*  $\tilde{A}$  é apresentada na Figura 2.9,

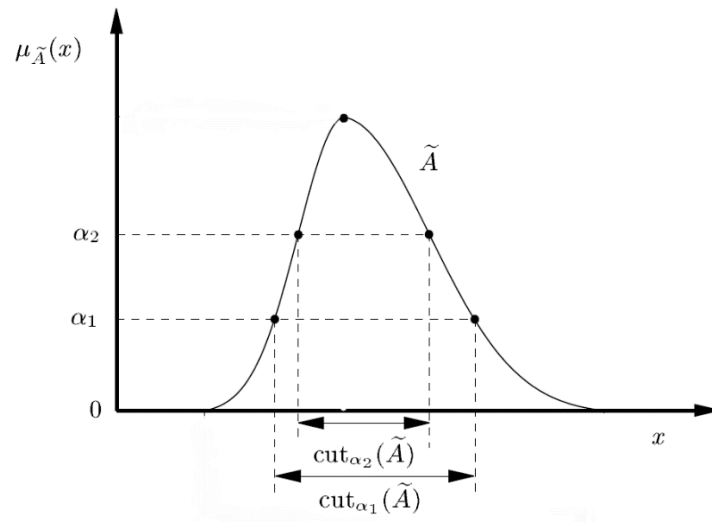


Figura 2.9 - Representação gráfica de um conjunto *fuzzy*, evidenciando diferentes  $\alpha$ -cuts [21].

### 2.2.4 Números Fuzzy

Um número *fuzzy*  $\tilde{p}$  é um conjunto *fuzzy*  $\tilde{P}$  que, para além de ser convexo e normalizado, respeita as seguintes condições [20]:

1. Existe apenas um  $x \in \mathbb{R}$  com  $\mu_{\tilde{P}}(x) = 1$  ( $x$  é designado por valor médio de  $\tilde{p}$ ).
2. A função de pertença  $\mu_{\tilde{P}}(x)$  é contínua.

Um conjunto *fuzzy* é normal se existe um  $x$  para o qual  $\mu_{\tilde{P}}(x) = 1$ , e convexo se [20],

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min \{ \mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2) \} \quad x_1, x_2 \in X, \lambda \in [0,1] \quad (2.15)$$

### 2.2.5 Tipos de Números Fuzzy

Existe um número infinito de conjuntos *fuzzy* que, respeitando as condições acima enunciadas, podem ser considerados como correspondendo a números *fuzzy*. No entanto, alguns tipos de função de pertença  $\mu_{\tilde{P}}(x)$  possuem uma maior relevância na aplicação da lógica fuzzy à resolução

de problemas práticos e, mais concretamente, de problemas de engenharia. Assim, apresenta-se de seguida o número *fuzzy* mais relevante para a simulação realizada no presente trabalho [21].

### 2.2.5.1 Números Fuzzy com Funções de Pertença Triangulares

Devido à simplicidade das funções de pertença triangulares, estes correspondem ao tipo de funções de pertença mais frequentemente utilizadas nas mais variadas aplicações da lógica *fuzzy*. O fato da função de pertença apresentar um comportamento linear facilita a implementação da lógica *fuzzy* em modelos computacionais, pois é mais simples gerar funções de pertença lineares que um outro tipo de função com um comportamento não linear, como por exemplo uma função de pertença Gaussiana. Considerando  $\bar{x}$  como o valor médio de uma função de pertença (ou seja, o valor para  $\alpha = 1$ ), e  $\Delta_E$  e  $\Delta_D$  como os desvios máximos à esquerda e à direita, respetivamente, do valor modal, podemos definir uma função de pertença triangular, de acordo com a seguinte função de pertença [21],

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \bar{x} - \Delta_E \\ 1 + \frac{(x - \bar{x})}{\Delta_E}, & \bar{x} - \Delta_E \leq x \leq \bar{x} \\ 1 - \frac{(x - \bar{x})}{\Delta_D}, & \bar{x} \leq x \leq \bar{x} + \Delta_D \\ 0, & x \geq \bar{x} + \Delta_D \end{cases} \quad (2.16)$$

É ainda de referir que a forma da função de pertença triangular pode variar, de acordo com os valores considerados para  $\bar{x}$ ,  $\Delta_E$  e  $\Delta_D$ . Assim, consoante a simulação que se pretende realizar, tanto é possível considerar uma função de pertença triangular que apresente simetria em torno de um eixo vertical, como funções de pertença com um desvio para a esquerda ou direita, como é exemplo a função de pertença representada na Figura 2.10,

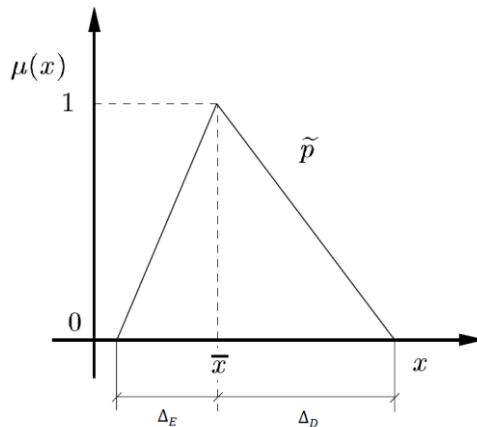


Figura 2.10 - Representação gráfica de uma função de pertença triangular [21].

## **2.3 Métodos de Propagação de Incerteza em Modelos Computacionais**

### **2.3.1 Tipos de Incerteza**

A incerteza associada às respostas estáticas e dinâmicas de uma estrutura são, no contexto da mecânica estrutural, tipicamente classificadas em duas categorias distintas. Estas categorias são designadas por incerteza aleatória e incerteza epistémica. A incerteza aleatória (também designada por incerteza estocástica), deve-se a uma variação inerente do parâmetro considerado, podendo ser, geralmente, caracterizada por uma função de probabilidade. Esta função de probabilidade é obtida a partir de dados estatísticos, resultantes de ensaios experimentais ou outros. A título de exemplo, a incerteza associada às tolerâncias de fabrico ou a fenómenos físicos pode ser classificada como incertezas aleatória. A incerteza epistémica, por outro lado, encontra-se associada a uma falta de informação acerca do valor exato ou função de probabilidade de um determinado parâmetro. Se ocorrer um aumento de informação relativa ao parâmetro em causa, por exemplo através de introdução de novos métodos na realização de ensaios experimentais ou melhorias nas aproximações numéricas, este tipo de incerteza pode ser reduzido, contrariamente à incerteza aleatória que é irredutível [22].

A classificação da incerteza nestas duas categorias influencia os métodos posteriormente utilizados para a realização da propagação de incerteza em modelos computacionais. Estes métodos podem ser classificados como probabilísticos ou não probabilísticos. Os primeiros caracterizam-se por recorrerem a funções de distribuição de probabilidade para modelar a incerteza nos parâmetros de modelação, neste caso tratados como variáveis aleatórias. Os segundos recorrem, por exemplo, a intervalos ou à lógica *fuzzy* para modelar esta mesma incerteza.

### **2.3.2 Métodos Probabilísticos**

Tal como foi referido, os métodos probabilísticos utilizados na análise de incerteza baseiam-se na utilização de funções de distribuição de probabilidade para representar a incerteza atribuída aos parâmetros de modelação. O método probabilístico mais extensamente utilizado na literatura é a simulação de Monte Carlo (MCS). Neste método, é obtida uma amostragem de valores para os parâmetros sujeitos a incerteza a partir das funções de distribuição de probabilidade anteriormente definidas. Estes valores são depois utilizados na realização de sucessivas simulações determinísticas, com o objetivo de obter um número significativo de valores de resposta do

modelo. O comportamento estatístico do modelo pode ser depois determinado a partir destes conjuntos de valores de resposta [7]. Uma das grandes desvantagens da utilização de métodos probabilísticos como o MCS consiste no elevado custo computacional associado. De fato, a caracterização das funções de distribuição de probabilidade da resposta do modelo requer muitas vezes a realização de milhares de simulações, o que pode não ser exequível em problemas de elevada dimensão e complexidade. Contudo, existem técnicas de amostragem alternativas, como por exemplo o método do Hipercubo Latino, que permitem reduzir este custo computacional através da realização de um menor número de simulações. Estes métodos alternativos possuem, no entanto, outras desvantagens associadas [7].

### 2.3.3 Métodos Não Probabilísticos

Os métodos não probabilísticos para análise de incerteza são normalmente utilizados quando a informação disponível acerca de um determinado parâmetro sujeito a incerteza é limitada ou subjetiva, ou quando não é necessário obter uma caracterização probabilística da resposta. Nestes métodos, a incerteza nos parâmetros de entrada do modelo pode ser representada por um intervalo, no caso da aritmética de intervalos, ou por uma função de pertença *fuzzy*, quando se recorre à lógica *fuzzy*. Alguns exemplos de aplicação da análise não probabilística são [23]:

- Modelos preliminares, utilizados nas fases iniciais do projeto, quando apenas se encontra disponível informação vaga ou aproximada acerca dos parâmetros de projeto.
- Modelos que apresentem parâmetros cuja incerteza é de difícil quantificação
- Modelos cujos parâmetros de entrada apresentem valores imprecisos, devido à inexistência de dados estatísticos completos.
- Investigação da influência das tolerâncias dos parâmetros de entrada do modelo na sua resposta.

Na análise de fontes de incerteza em estruturas de material compósito apresentada na secção 2.1.5, referiu-se a dificuldade da realização de uma caracterização completa da incerteza associada às propriedades de um compósito laminado à macroescala. De acordo com o apresentado, isto deve-se à complexidade e elevada interdependência dos vários fatores que contribuem para a existência de incerteza. Por exemplo, é difícil quantificar a influência que o desalinhamento no ângulo de orientação das fibras terá nos módulos de elasticidade de um laminado, uma vez que esta orientação apresenta também uma elevada variabilidade. Desta forma, muitas vezes não é possível, de forma rigorosa, quantificar a incerteza num determinado parâmetro de entrada de um modelo em termos de uma função de distribuição de probabilidade. Assim, a utilização de métodos de análise não probabilística permite lidar com esta subjetividade da informação disponível, o que se adequa à análise que se pretende realizar à variabilidade da

resposta de estruturas em compósito laminado. Para além disso, desde que os intervalos de incerteza se encontrem bem definidos e que o método de propagação de incerteza utilizado seja adequado ao problema, os resultados da simulação irão corresponder a intervalos de resposta representativos da realidade [23].

Na secção 2.3.3.1 apresenta-se uma descrição mais pormenorizada do método de elementos finitos *fuzzy* (FFEM). Este método não probabilístico de propagação de incertezas foi implementado no modelo desenvolvido no âmbito deste trabalho, para a caracterização da influência da incerteza na variabilidade de resposta de placas de compósito laminado.

### **2.3.3.1 Método de Elementos Finitos Fuzzy (FFEM)**

A utilização do método de elementos finitos fuzzy (FFEM) visa obter a função de pertença *fuzzy* de uma determinada variável de resposta, resultante de uma análise de elementos finitos, partindo de uma descrição fuzzy de todos os parâmetros de entrada não-determinísticos [24]. A implementação computacional do FFEM passa pela utilização de uma abordagem na qual se realiza, em primeiro lugar, uma discretização da função de pertença dos parâmetros de entrada. Para tal, o espaço da função de pertença é subdividido em diversos níveis  $\alpha$  (os denominados  $\alpha$  – *cut*), que assumem um valor no intervalo  $[0,1]$ . A intersecção da função de pertença de um parâmetro de entrada do modelo com cada  $\alpha$  – *cut* considerado, define um intervalo de valores  $U_\alpha$ , de limite superior  $\bar{u}$  e limite inferior  $\underline{u}$ , definido por  $U_\alpha = [\underline{u} \ \bar{u}]_\alpha$  [25]. Assim, por cada parâmetro de entrada sujeito a incerteza, teremos um intervalo de valores, que é utilizado na realização de uma análise de intervalos em cada nível  $\alpha$ . A partir desta análise são obtidos os intervalos de resposta do modelo, mais uma vez para cada nível  $\alpha$ . Finalmente, a função de pertença da resposta é construída a partir dos intervalos da resposta obtidos para todos os níveis  $\alpha$  considerados.

O FFEM passa pela aplicação desta abordagem de discretização através de subníveis  $\alpha$ , e posterior análise de intervalos, ao processo de simulação numérica de uma análise de elementos finitos determinística. Assim, em cada nível  $\alpha$  é necessário proceder a uma análise usando o método de elementos finitos de intervalos (IFEM). Existem diversas estratégias que podem ser seguidas na implementação do IFEM. As estratégias mais relevantes são apresentadas de seguida.

### **Aritmética de Intervalos**

A estratégia mais frequentemente utilizada na aplicação do IFEM consiste na implementação da aritmética de intervalos [24]. Nesta abordagem, todas as operações algébricas determinísticas presentes na formulação de elementos finitos do problema são substituídas pelas correspondentes operações de aritmética de intervalos. Este procedimento apresenta como vantagem o fato de ser

um processo eficiente do ponto de vista computacional. No entanto, esta abordagem encontra-se limitada na sua aplicação prática, uma vez que apresenta desvantagens relevantes. A principal desvantagem consiste no fato dos intervalos resultantes de cada operação serem largamente sobrestimados, o que leva à obtenção de soluções muito conservadoras no que respeita aos intervalos de resposta de problemas reais (24,26).

### Método dos Vértices

O método dos vértices permite determinar o intervalo de valores que a função de resposta pode assumir, considerado os vértices do espaço de projeto como valores para os parâmetros de entrada. Do ponto de vista da avaliação da incerteza, os vértices são representativos dos valores máximos e mínimos que os parâmetros de entrada do modelo podem assumir. A partir da simulação realizada considerando as diversas combinações de pontos de vértice para os parâmetros de entrada, é possível estabelecer os valores máximos e mínimos da resposta que se pretende avaliar [24]. A Figura 2.11 representa graficamente os pontos resultantes da aplicação deste método considerando um espaço tridimensional de três variáveis sujeitas a incerteza.

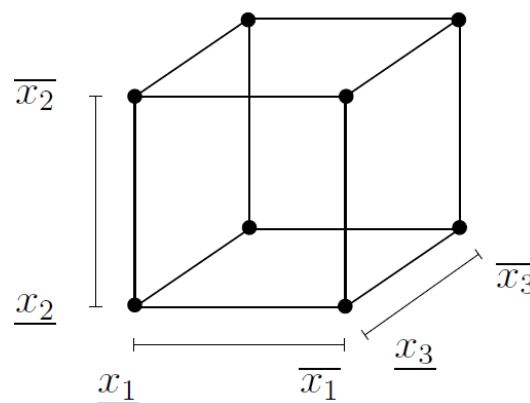


Figura 2.11 - Representação gráfica do método dos vértices [27].

A aplicação desta abordagem requer que sejam realizadas  $2^N$  simulações de elementos finitos determinísticas, sendo  $N$  o número de parâmetros do modelo que se considera estarem sujeitos a incerteza. Trata-se de um método relativamente fácil de implementar, possuindo um custo computacional relativamente reduzido, quando o número de parâmetros  $N$  considerados na simulação não é elevado. Contudo, este custo computacional cresce de forma exponencial com o aumento de  $N$  pelo que, para modelos que consideram incerteza em muitos parâmetros simultaneamente, a sua utilização poderá não ser viável [27].





## 3. Métodos de Simulação Numérica

---

A metodologia seguida no presente trabalho para avaliação dos efeitos da incerteza em propriedades de materiais compósitos laminados na variabilidade das suas respostas estáticas e dinâmicas requer o uso de um método que permita realizar sucessivas simulações numéricas, uma vez que assenta na implementação do FFEM. Desta forma, recorreu-se ao software comercial ANSYS Mechanical APDL para executar toda a modelação e simulação de elementos finitos, tendo este sido utilizado em conjunto com o software MATLAB, que permite lidar com a componente do modelo associada à utilização da lógica *fuzzy*. No presente capítulo apresenta-se uma descrição dos métodos implementados para a análise de propagação de incerteza em modelos computacionais de materiais compósitos laminados. Por forma a avaliar os resultados obtidos com recurso a estes modelos, realizou-se uma comparação entre estes resultados e as soluções exatas para formulações de elementos finitos de diferentes casos de estudo apresentadas em [6]. Assim, neste capítulo apresentam-se também os resultados desta comparação, bem como a justificação dos diferentes parâmetros de modelação utilizados.

### 3.1 Simulação de Incerteza nos Parâmetros de Modelação

Para que seja possível determinar a variabilidade da resposta estrutural de um compósito laminado, é necessário considerar que um ou mais parâmetros de modelação são incertos. Do ponto de vista computacional, isto equivale a considerar que estes parâmetros podem não corresponder a um valor exato, mas sim a um valor com um determinado desvio relativamente ao valor médio considerado. Cada parâmetro de modelação terá assim um efeito nas resposta estática e dinâmica obtidas através da simulação e, conseqüentemente, na caracterização da sua variabilidade.

Tal como foi mencionado na secção 2.1.5, a quantificação total da incerteza associada às propriedades de materiais compósitos laminados é um processo difícil, devido à elevada complexidade e interdependência dos vários fatores que conduzem a esta mesma incerteza. No entanto, por forma a que a simulação considerando incerteza seja viável do ponto de vista computacional, é necessário traduzir esta incerteza associada a estruturas reais em incerteza associada aos valores dos parâmetros de entrada do modelo computacional. Torna-se, portanto, necessário proceder a uma simplificação, identificando quais as fontes de incerteza preponderantes em estruturas reais, para que os mesmos possam ser considerados no modelo utilizado na análise.

Neste trabalho, com base no que é mencionado na secção 2.1.5, existirá um foco na análise dos efeitos de incerteza relacionada com as propriedades mecânicas das lâminas, com os erros e desalinhamentos na orientação das fibras e com a incerteza da espessura laminar. Estas incertezas traduzem-se, do ponto de vista dos parâmetros de entrada do modelo, em incerteza ao nível dos valores dos ângulos de orientação das fibras e da espessura de cada lâmina, bem como dos valores de algumas das propriedades mecânicas das lâminas, como são exemplo o módulo de elasticidade longitudinal ( $E_{11}$ ) ou o módulo de distorção no plano  $x_1x_2$  ( $G_{12}$ ). Considera-se que estes fatores se encontram associados à variabilidade inerente aos processos de fabrico utilizados, nomeadamente ao nível do processo de cura e de moldagem, bem como à variabilidade inerente às propriedades mecânicas dos materiais constituintes do laminado.

De acordo com o que se mencionou na secção 2.3.3, irá recorrer-se ao FFEM para realizar a propagação de incertezas no modelo. Assim, considerou-se que os parâmetros de modelação para os quais é assumida a existência de incerteza são representados por uma determinada função de pertença *fuzzy*. Esta função de pertença *fuzzy* pode apresentar diferentes formas, de acordo com o que foi mencionado em 2.2.5, facto que permite controlar de forma independente a distribuição dos valores considerados para cada parâmetro sujeito a incerteza. Assim, um parâmetro de modelação para o qual se considera incerteza, ficará definido com a escolha do tipo de função de *membership fuzzy* que o representa e com a definição do intervalo de valores que este poderá assumir, para cada  $\alpha$  – *cut*.

## 3.2 ANSYS Mechanical APDL

O método de elementos finitos é uma ferramenta de análise numérica com ampla aplicação na resolução de diversos problemas reais de engenharia, nomeadamente ao nível da análise do comportamento mecânico de estruturas, da mecânica de fluídos e da transmissão de calor. O método de elementos finitos baseia-se na discretização de geometrias complexas num número finito de elementos de geometria mais simples, cujo comportamento representa uma aproximação do comportamento do modelo real. Existem diversos programas comerciais disponíveis no mercado para a realização de análise de elementos finitos. Estes programas procuram simplificar a realização da simulação numérica de problemas através da implementação de diversos módulos, interfaces gráficas, etc.

Para a realização das simulações numéricas de materiais compósitos laminados necessárias ao presente trabalho, optou-se pela utilização do software comercial ANSYS Mechanical APDL 17.2. Esta escolha (por oposição ao desenvolvimento de raiz dos modelos de elementos finitos através de escrita de código MATLAB, por exemplo) deve-se ao fato de a utilização de um

software de análise de elementos finitos comercial permitir uma maior flexibilidade e rapidez na análise de diferentes casos de estudo. Uma vez que as alterações a realizar ao código base são menos significativas, torna-se mais simples modificar as condições fronteira, geometrias, etc, o que permite simular um dado número de casos de estudo com menor dispêndio de tempo comparativamente com a simulação utilizando, por exemplo, exclusivamente o MATLAB. Para além disso, o ANSYS APDL oferece diversas ferramentas de análise e modelação de materiais compósitos que garantem a realização de uma modelação adequada das condições reais, para as geometrias que se pretende analisar. Outro ponto importante, é o fato de ser possível realizar uma utilização integrada com o software MATLAB, o que permite proceder à implementação do FFEM. De seguida descreve-se o processo de modelação de materiais compósitos laminados com recurso ao ANSYS Mechanical APDL que foi realizado no presente trabalho através da escrita de código em ficheiro APDL.

### **3.2.1 Modelação de Materiais Compósitos Laminados Utilizando o ANSYS Mechanical APDL**

A simulação numérica utilizando o ANSYS, de um modo geral, envolve a utilização de três módulos principais: o pré-processador (*pre-processor*), o processador (*processor*) e o pós-processador (*pos-processor*). No pré-processador o modelo é criado através da definição de geometrias, propriedades do material e tipo de elemento a utilizar, bem como através da definição das cargas aplicadas e condições fronteira. A partir destes dados, o processador calcula as matrizes de rigidez do modelo e os vetores das forças generalizadas aplicadas, obtendo-se as soluções das equações algébricas sob a forma dos valores dos deslocamentos generalizados nodais. O módulo do pós-processador permite obter outros resultados de interesse, derivados dos valores de deslocamento nodais, como por exemplo as tensões, extensões ou valores de diferentes critérios de falha.

#### **3.2.1.1 Escala da Análise**

De acordo com o que foi mencionado em 2.1.3, a análise do comportamento mecânico de estruturas de material compósito laminado pode ser realizada a diferentes escalas, dependendo da situação que se pretende analisar. Quando se pretende realizar uma análise detalhada, a modelação deverá ser realizada ao nível dos materiais constituintes, ou seja, ao nível das fibras e da matriz. Nesta situação, será necessário modelar toda a microestrutura, incluindo a forma e distribuição geométrica das fibras, bem como utilizar as propriedades mecânicas dos materiais constituintes.

No entanto, devido ao elevado custo computacional, evita-se a utilização da abordagem à microescala quando se pretendem obter apenas respostas estruturais como a deformada ou as frequências naturais. De fato, nestes casos, torna-se mais eficiente a utilização de uma abordagem à macroescala, que permite obter resultados semelhantes com um menor custo computacional. Assim, e uma vez que no presente trabalho se pretendem determinar apenas as respostas estruturais do laminado, optou-se pela realização de modelação à macroescala.

### 3.2.1.2 Elementos Disponíveis

O ANSYS permite a utilização de diferentes elementos na análise de materiais compósitos, de acordo com o tipo de análise a efetuar e respostas que se pretende determinar. De seguida, apresenta-se uma descrição comparativa destes elementos, baseada na documentação de apoio do software e outra literatura disponível.

Os elementos tipo casca são tipicamente utilizados em situações nas quais as dimensões da estrutura na direção da espessura são consideravelmente inferiores ao comprimento e largura correspondente. Este pressuposto verifica-se em grande parte das aplicações de compósitos laminados reforçados por fibras, pelo que a utilização deste tipo de elementos na sua modelação permite obter resultados adequados [13]. A geometria dos elementos tipo casca utilizados no presente trabalho consiste numa superfície bidimensional, que representa a superfície média de uma determinada lâmina, encontrando-se, portanto, posicionada a meio da sua espessura. A principal vantagem dos elementos tipo casca relativamente aos elementos sólidos reside no facto de os primeiros permitirem simulações menos exigentes do ponto de vista computacional, com resultados muito semelhantes para a situação de espessura reduzida [28].

Ao nível dos elementos tipo casca para modelação de compósitos laminados disponíveis no ANSYS, existem duas possibilidades: o elemento SHELL 181 e o elemento SHELL281. O elemento SHELL 181 é um elemento do tipo casca com 4 nós e 6 graus de liberdade por cada nó (translações nas direções  $x, y$  e  $z$  e as rotações em torno dos eixos  $x, y$  e  $z$ ), adequado à análise linear e não linear de camadas de espessura fina a moderada. Este elemento é adequado à modelação de estruturas de compósitos laminados e do tipo *sandwich*, sendo que a sua formulação se baseia na teoria de deformação de corte de primeira ordem (FSDT) [28]. O elemento SHELL 281 é muito semelhante ao SHELL 181, sendo que a única diferença reside no facto de o elemento SHELL 281 utilizar 8 nós. Isto permite obter resultados mais precisos para uma malha de igual dimensão, à custa de um tempo de simulação superior. A geometria dos elementos SHELL 181 e SHELL 281 é apresentada na Figura 3.1.

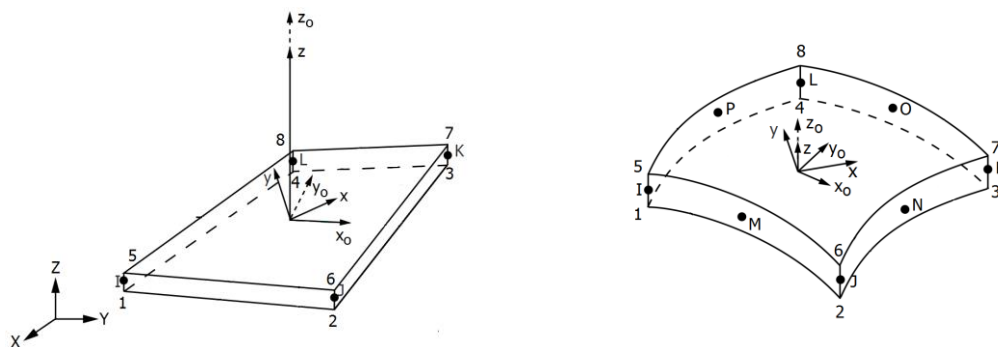


Figura 3.1 - Geometria dos elementos SHELL 181 e SHELL 281, respectivamente (28).

Relativamente aos elementos sólidos, o ANSYS disponibiliza os elementos SOLID 185, SOLID 186 e SOLSH190. O elemento SOLID 185 é um elemento tridimensional de geometria hexaédrica com 8 nós e 3 graus de liberdade por cada nó (translações nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ ), adequado à modelação de estruturas com camadas com um valor de  $a/h$  reduzido. O elemento SOLID 186 corresponde a uma versão de 20 nós do elemento SOLID 185. O elemento SOLSH190 é um elemento do tipo casca sólido, com 8 nós e seis graus de liberdade por cada nó. Os elementos de tipo casca sólidos são uma classe de elemento cuja formulação inclui constrangimentos cinemáticos que permitem representar o comportamento de uma casca [13].

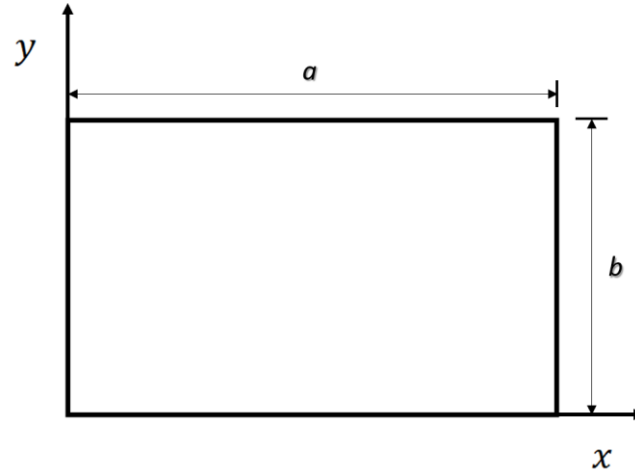
Os elementos do tipo casca permitem assim a realização de simulações computacionalmente mais eficientes que os elementos sólidos, mais complexos, permitindo simultaneamente a obtenção de resultados muito semelhantes quando se realiza a análise de estruturas finas (tipicamente, para rácios  $a/h$  superiores a 10). Uma vez que a grande maioria das estruturas de material compósito laminado cumpre este requisito, existem vantagens na utilização de elementos tipo casca em detrimento de elementos sólidos na realização da simulação numérica deste tipo de estruturas. Assim, na análise linear realizada neste trabalho, foram utilizados exclusivamente elementos do tipo casca, nomeadamente o elemento SHELL 181 e o elemento SHELL 281.

### 3.2.1.3 Condições Fronteira

As condições fronteira correspondem ao tipo de restrição dos graus de liberdade na fronteira do problema. Estes graus de liberdade podem corresponder a translações ou rotações, sendo que o constrangimento de diferentes graus de liberdade corresponde a diferentes tipos de condições fronteira. Assim, poderemos ter condições fronteira nas quais a estrutura se encontra simplesmente apoiada, fixa ou encastrada.

De acordo com o que foi mencionado em 2.1.4, os compósitos laminados cuja sequência de empilhamento é não simétrica apresentam acoplamentos, uma vez que alguns valores da sua matriz de rigidez de acoplamento são não nulos. Assim, a flexão pura de uma estrutura laminada

não simétrica conduz ao aparecimento de deformações acopladas. Desta forma, apesar de, tipicamente, apenas os deslocamentos transversais se encontrarem constrangidos na análise de estruturas simplesmente apoiadas, a modelação adequada de estruturas compósitas laminadas requer a definição de alguns constrangimentos adicionais [13]. Tipicamente, no contexto das formulações analíticas, são aplicados dois conjuntos de constrangimentos, de acordo com a sequência de empilhamento em causa. Estes constrangimentos são definidos da seguinte forma para o caso da Figura 3.2 [6],



<i>SS-1</i>		<i>SS-2</i>	
$x = 0 \mid x = a$	$y = 0 \mid y = b$	$x = 0 \mid x = a$	$y = 0 \mid y = b$
$v_0 = w_0 = \varphi_y = 0$	$u_0 = w_0 = \varphi_x = 0$	$u_0 = w_0 = \varphi_y = 0$	$v_0 = w_0 = \varphi_x = 0$

Figura 3.2 - Tipos de condições fronteira para análise de estruturas simplesmente apoiadas.

As condições fronteira SS-1 devem ser aplicadas na análise de laminados com sequências de empilhamento antissimétricas cruzadas (*cross-ply*) e as condições SS-2 para o caso de laminados antissimétricos angulares (*angle-ply*). No caso de laminados simétricos poderemos aplicar qualquer um dos conjuntos de constrangimentos. No presente trabalho, devido às sequências de empilhamento consideradas, foram definidas as condições fronteira SS-1 em todos os casos de estudo.

### 3.3 Implementação do FFEM

A análise dos diferentes casos de estudo considerados neste trabalho assenta na implementação do FFEM para a realização da propagação de incerteza nos modelos, de acordo com o que foi apresentado na secção 2.3.3.1. A implementação computacional do FFEM exige, em primeiro

lugar, um método para a realização de sucessivas análises de elementos finitos. Estas análises foram realizadas com recurso ao software ANSYS, de acordo com o que foi mencionado nas secções anteriores. No entanto, para além da realização de simulação numérica, é necessário implementar métodos que permitam controlar o processo de simulação, lidando com os aspetos da metodologia relacionados com a aplicação da lógica *fuzzy*. Para tal, optou-se pela escrita de código MATLAB, que funciona assim de forma integrada com o ANSYS, permitindo obter, como resultado da simulação, as funções de pertença *fuzzy* das respostas estruturais que se pretendem determinar. Desta forma, o ANSYS será responsável por todos os aspetos relacionados com a simulação numérica dos modelos, sendo que o MATLAB funciona como um controlador de pré e pós processamento, gerando os valores dos parâmetros de entrada, utilizando-os na realização de simulações em *batch* e obtendo a função de pertença da resposta estrutural pretendida.

### 3.3.1 Descrição do Modelo Computacional para Propagação de Incerteza

O modelo computacional desenvolvido, cuja descrição funcional é apresentada de seguida, baseia-se na escrita de código MATLAB e de ficheiros APDL, que contêm as instruções para a realização de todo o processo de simulação numérica utilizando o ANSYS. Assim, cada caso de estudo analisado terá um ficheiro APDL base, que corresponde ao conjunto de instruções necessárias para a realização da análise determinística. O código MATLAB, responsável pelo controlo do pré e pós-processamento é, na sua grande maioria, comum a todos os casos de estudo analisados.

A simulação tem início com a definição dos parâmetros de entrada do modelo de elementos finitos que se considera estarem sujeitos a incerteza, para um determinado caso de estudo. Para além disto, é também necessário definir o tipo de função de pertença *fuzzy* que representará cada um dos parâmetros, bem como o número de  $\alpha$ -cuts que irão ser considerados na análise. A partir destes dados, o código MATLAB gera as funções de pertença para cada parâmetro e, através da discretização destas funções, os intervalos de valores que estes parâmetros poderão assumir em cada nível  $\alpha$ . De seguida, de acordo com o método dos vértices mencionado em 2.3.3.1, o código MATLAB determina todas as combinações de valores máximos e mínimos que existem para os parâmetros sujeitos a incerteza, mais uma vez para cada  $\alpha$ -cut. Procede-se à leitura do ficheiro APDL base, cuja sequência de instruções é armazenada numa variável. A partir desta sequência de instruções, é possível realizar a escrita de ficheiros APDL modificados. Nestes ficheiros, as instruções correspondendo à definição dos parâmetros para os quais se considera incerteza são alteradas relativamente ao ficheiro base, sendo substituídas por uma das combinações de valores máximos e mínimos determinada anteriormente. Por outro lado, para os parâmetros que se

considera serem constantes, as instruções são copiadas do APDL base. Procede-se deste modo para todas as combinações de valores existentes para cada nível  $\alpha$ , sendo que à escrita do ficheiro APDL base se segue a realização de simulação numérica em *batch*, com recurso ao ANSYS. Assim, a título de exemplo, se considerarmos incerteza em quatro parâmetros do modelo, teremos 16 combinações de valores distintas. Se na simulação forem considerando 5 níveis  $\alpha$ , será necessário realizar um total de 81 simulações de elementos finitos, sendo 80 destas simulações realizados com recurso a ficheiros APDL modificados e uma com recurso ao APDL base (simulação determinística, correspondente ao nível  $\alpha = 1$ ). Os valores da resposta estrutural, resultantes da simulação, são escritos num ficheiro de texto pelo ANSYS. O MATLAB lê estes valores, armazenando-os numa matriz. De seguida, determinam-se os valores máximos e mínimos da resposta para cada nível  $\alpha$ . A partir destes valores é possível construir a função de pertença da variável de resposta que se pretende determinar. Na Figura 3.3 apresenta-se um esquema geral do funcionamento do modelo desenvolvido para a propagação de incerteza, evidenciando a utilização conjunta do software MATLAB e ANSYS.

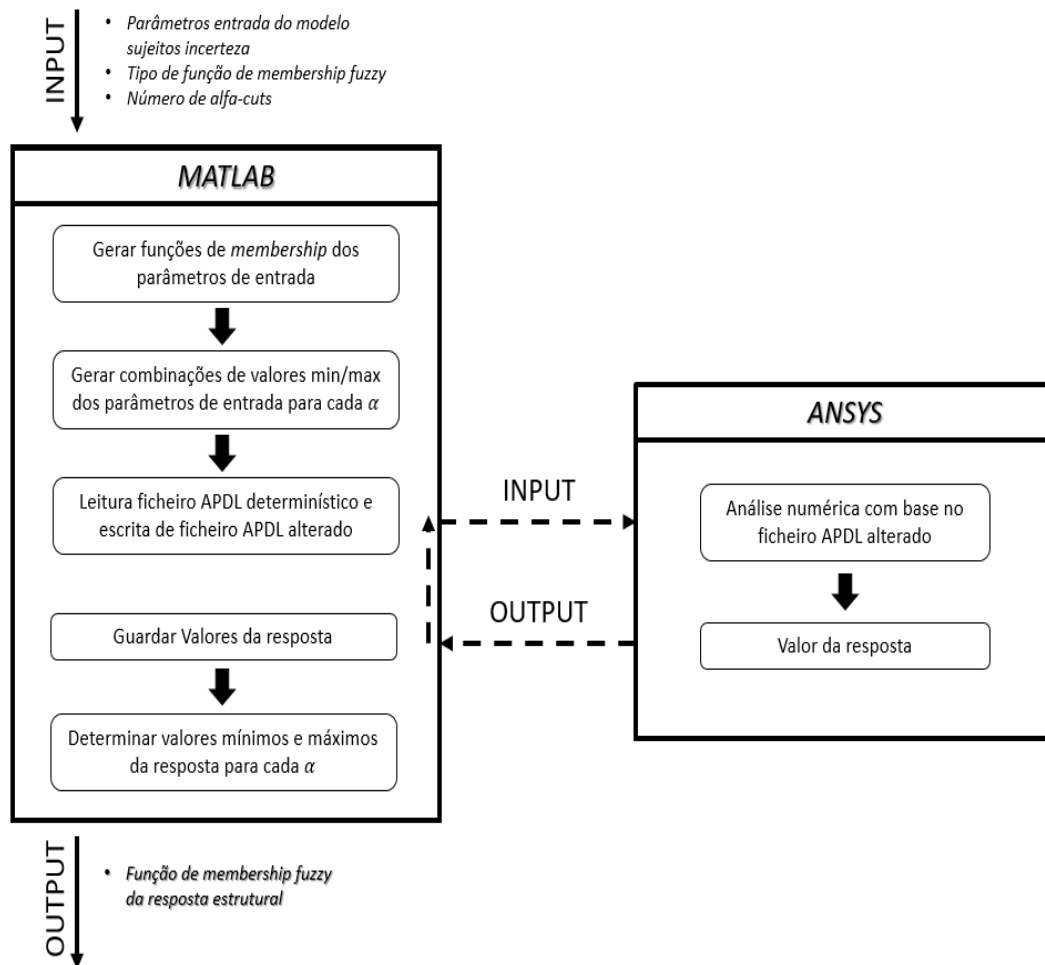


Figura 3.3 - Esquema descritivo do funcionamento do modelo computacional implementado.



### 3.4 Estudo de Convergência

Com o objetivo de determinar a dimensão da malha mais adequada à realização do presente estudo, procedeu-se a uma análise comparativa da convergência de resultados obtidos com diferentes parâmetros de simulação. Esta análise baseia-se na modelação de um caso de estudo simplificado, no qual os valores da deformada máxima e da 1ª frequência natural (adimensionalizada) de uma placa são obtidos para diferentes graus de refinação da malha.

Este estudo de convergência é realizado considerando uma placa laminada quadrada constituída por 4 lâminas ortotrópicas, todas elas orientadas a 0°. Relativamente às condições fronteira, considera-se que a placa se encontra simplesmente apoiada e que é aplicado um carregamento transversal uniforme. As propriedades mecânicas e geométricas consideradas neste estudo são apresentadas na tabela Tabela 3.4.1.

Tabela 3.4.1 - Propriedades do laminado consideradas no estudo da convergência.

E11[GPa]	E22 [GPa]	$\nu_{12}$	$G_{12}$ [GPa]	$G_{13}$ [GPa]	$G_{23}$ [GPa]
140	10	0.3	5	5	4

É expectável que o aumento da dimensão da malha permita obter resultados mais próximos dos obtidos através de formulações analíticas. No entanto, a sucessiva refinação da malha conduz a um aumento do nº total de elementos e, conseqüentemente, da dimensão do modelo, algo que irá afetar negativamente o custo computacional da simulação. Pretende-se assim determinar a combinação de tipo de elemento e de dimensão da malha que permite obter resultados adequados, com um custo computacional aceitável.

Nesta análise verificou-se que, tanto para a simulação estática como dinâmica, uma malha de 50 por 50 elementos permite obter o valor da deformada máxima para o qual a simulação irá convergir. Os resultados obtidos para esta malha com 2500 elementos foram considerados como correspondendo ao valor de referência, uma vez que se verificou que malhas com mais elementos conduzem à obtenção de resultados iguais. A dimensão da malha a utilizar será considerada aceitável quando o valor da resposta em causa convergir para o valor de referência, ou apresentar um desvio suficientemente pequeno (cerca de 1% de desvio relativamente ao valor de referência).

#### 3.4.1 Análise Estática

A Tabela 3.4.2 apresenta os resultados obtidos após a análise estática realizada com dois elementos distintos, para duas relações comprimento do lado/espessura diferentes. Foram utilizados os elementos SHELL 181 e SHELL 281 por serem aqueles que mais se adequam à análise que se pretende realizar no presente trabalho, de acordo com o que foi mencionado na

secção 3.2.1.2. Relativamente à utilização de duas relações  $a/h$  diferentes, o objetivo foi determinar se esta teria algum efeito na convergência dos resultados.

Como se pode observar através da análise dos valores da tabela Tabela 3.4.2, ambos os elementos apresentam uma convergência significativa, mesmo para malhas de dimensão mais reduzida. De fato, no pior dos casos, os desvios relativos aos valores de referência rondam os 3%. Para além disso, é também possível constatar que o elemento SHELL 281 converge mais rapidamente para o valor de referência. No entanto, esta situação resulta apenas em ganhos marginais em termos de precisão de resultados (comparativamente com a malha 50x50), uma vez que os valores obtidos com o elemento SHELL 181 são muito semelhantes aos obtidos com o SHELL 281. Podemos também concluir que, no caso do elemento SHELL 281, malhas com mais de 100 elementos não trazem qualquer tipo de benefício adicional em termos de precisão. Relativamente ao caso do elemento SHELL 181, uma malha de 144 elementos (12 elementos por lado) permite já obter desvios de cerca de 0.2% em relação aos valores de referência, pelo que uma refinação adicional não terá impacto. Constatou-se também que a relação  $a/h$  não tem efeitos na convergência de resultados, pelo que poderão ser usadas malhas de dimensão semelhante em ambos os casos.

Tabela 3.4.2 - Valores da deformada transversal máxima (mm) obtidos para o estudo de convergência.

Nº elementos por lado	SHELL 181		SHELL 281	
	$a/h = 20$	$a/h = 100$	$a/h = 20$	$a/h = 100$
4	0,1571	3,6918	0,1523	3,5965
6	0,1541	3,6222	0,1523	3,5856
8	0,1532	3,6035	0,1524	3,5853
10	0,1529	3,5963	0,1524	3,5854
12	0,1527	3,5928	0,1524	3,5854
14	0,1526	3,5908	0,1524	3,5854
16	0,1526	3,5895	0,1524	3,5855
18	0,1525	3,5886	0,1524	3,5855
20	0,1525	3,5880	0,1524	3,5855
30	0,1524	3,5866	0,1524	3,5855
40	0,1524	3,5861	0,1524	3,5855
50	0,1524	3,5858	0,1524	3,5855

Tal como seria de esperar, verificou-se que a utilização dos elementos SHELL 281 acarreta tempos de simulação superiores. Assim, para o caso do elemento SHELL 181, foram necessários 35.4 segundos para completar as simulações correspondentes a todo o conjunto da tabela. Para o elemento SHELL 281 foram necessários 44.1 segundos, o que corresponde a um aumento de cerca de 25 %. Esta diferença corresponde à análise de um caso simplificado, sendo que para casos que envolvam uma maior complexidade as diferenças nos tempos totais de simulação serão

superiores. Para além disso, constatou-se que as diferenças entre os resultados obtidos com os dois elementos não são significativas. Assim sendo, o elemento SHELL 181 será utilizado para a realização das análises estáticas apresentadas neste trabalho.

### 3.4.2 Análise Dinâmica

Na Tabela 3.4.3 apresentam-se os valores da 1ª frequência natural adimensional que resultaram da simulação do caso considerado no estudo de convergência. De modo semelhante à análise estática, procedeu-se a simulação com recurso aos elementos SHELL 181 e SHELL 281, para dois rácios  $a/h$  distintos. A frequência natural é adimensionalizada com recurso à seguinte equação [6],

$$\bar{\omega} = \frac{\omega a^2 \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}}{h} \quad (3.1)$$

Sendo  $a$  o comprimento do lado da placa,  $\rho$  a massa volúmica do material,  $E_2$  o módulo de elasticidade transversal efetivo e  $h$  a espessura total do laminado.

Tabela 3.4.3 - Valores da frequência natural fundamental (adimensional), obtidos para o estudo de convergência.

Nº elementos por lado	SHELL 181		SHELL 281	
	$a/h = 20$	$a/h = 100$	$a/h = 20$	$a/h = 100$
4	12,1864	12,6199	11,5913	12,0057
6	11,8459	12,2550	11,5814	11,9730
8	11,7285	12,1295	11,5796	11,9705
10	11,6742	12,0717	11,5796	11,9700
12	11,6450	12,0404	11,5790	11,9699
14	11,6275	12,0216	11,5790	11,9697
16	11,6164	12,0095	11,5790	11,9697
18	11,6082	11,9979	11,5790	11,9697
20	11,6030	11,9951	11,5790	11,9697
30	11,5895	11,9810	11,5790	11,9697
40	11,5849	11,9760	11,5790	11,9697
50	11,5831	11,9737	11,5790	11,9697

A análise dos valores apresentados na Tabela 3.4.3 permite concluir que, mais uma vez, mesmos os valores obtidos para malhas de dimensão reduzida se encontram próximos dos valores de referência considerados. Assim, o desvio máximo dos resultados relativamente ao valor de referência ocorre para o caso do elemento SHELL 181, sendo cerca de 5%. No entanto os valores

para este elemento convergem rapidamente, pelo que uma malha de 256 elementos permite obter valores com um erro de apenas 0.3% relativamente ao valor de referência, que corresponde à utilização de uma malha de 2500 elementos. No caso do elemento SHELL 281 a convergência verifica-se ainda mais rapidamente. De fato, as malhas mais reduzidas apresentam um erro próximo de zero, sendo que malhas com um número de elementos superior a 144 não trazem qualquer tipo de benefício adicional em termos de precisão. Relativamente ao tempo necessário para realizar a simulação de todas as malhas apresentadas na tabela, no caso do elemento SHELL 181 obteve-se uma média de 27.4 segundos, sendo que para o elemento SHELL 281 o valor médio foi de 41.2 segundos. Assim, a utilização deste elemento acarreta um aumento de cerca de 50% no tempo de simulação. No entanto, o facto de ser possível compensar o maior custo computacional do elemento SHELL 281 com a utilização de malhas menos refinadas determinou que este elemento tenha sido escolhido na realização da simulação dinâmica. Constatou-se, mais uma vez, que a relação  $a/h$  não tem efeitos significativos na convergência dos valores da 1ª frequência natural, pelo que poderão ser usadas malhas de dimensão semelhante em ambos os casos.

### 3.5 Verificação da Análise de Elementos Finitos

Com o objetivo de realizar a validação da modelação de placas de material compósito laminado implementada com recurso ao software comercial ANSYS, procedeu-se a uma comparação dos resultados obtidos através de simulação com resultados disponíveis na literatura. Esta comparação foi realizada para duas respostas do modelo, nomeadamente a deformada máxima da placa e a sua frequência natural fundamental. Os valores utilizados como referência correspondem, em ambos os casos, às soluções exatas obtidas a partir da formulação analítica apresentados em (6). As propriedades mecânicas consideradas em ambas as validações são,

$$E_{11} = 25E_{22} ; G_{12} = G_{13} = 0.5E_{22} ; G_{23} = 0.2E_{22} ; \nu_{12} = 0.25$$

#### 3.5.1 Verificação dos Resultados da Deformada Transversal Máxima

Na validação dos resultados obtidos para a deformada transversal máxima foi realizada uma comparação com as soluções analíticas adimensionais apresentadas em [6], para diferentes casos de placas de material compósito laminado quadradas sujeitas a um carregamento uniforme. Na simulação, foi utilizado o elemento SHELL 281 com uma malha de 12 elementos por lado. As soluções analíticas apresentadas em [6] foram obtidas com base na FSDT. Relativamente às condições fronteira, considera-se que a placa se encontra simplesmente apoiada ao longo de todo

o seu rebordo, de acordo com as condições SS1 apresentadas anteriormente. São simuladas diferentes sequências de empilhamento simétricas e antissimétricas, para dois valores do rácio  $a/h$ , com o objetivo de testar a validade do modelo em diferentes condições. Os resultados obtidos e os valores das soluções exatas disponíveis em [6] são apresentados na Tabela 3.5.1. Os valores adimensionalizados da deformada transversal máxima apresentados na Tabela 3.5.1 são obtidos a partir da seguinte equação [6],

$$\bar{w} = w \left( 100 \times \frac{E_{22} h^3}{a^4 q_0} \right) \quad (3.2)$$

Sendo  $a$  o comprimento do lado da placa,  $q_0$  o valor do carregamento aplicado,  $E_2$  o módulo de elasticidade transversal e  $h$  a espessura total do laminado.

Tabela 3.5.1 - Valores da deformada transversal máxima (adimensional), obtidos para o estudo de validação.

	$a/h = 20$		$a/h = 100$	
	(Reddy, 2004)	Presente Estudo	(Reddy, 2004)	Presente Estudo
$[0/90]_s$	0,7694	0,8039	0,6833	0,6848
$[0/90/0]$	0,7572	0,7963	0,6697	0,6713
$[0/90/90/0]_s$	0,7575	0,7762	0,6896	0,6913
$[0/90]$	1,7582	1,759	1,698	1,698
$[0/90]_4$	0,7776	0,7971	0,7175	0,7183

Como é possível constatar através da análise da Tabela 3.5.1, os valores da deformada transversal máxima, obtidos a partir do modelo considerado no presente trabalho, aproximam-se de forma dos valores exatos correspondentes à solução analítica. De fato, no pior dos casos, que ocorre para a sequência de empilhamento  $[0/90/0]$ , regista-se um erro relativo de aproximadamente 5%. Para as restantes sequências de empilhamento o erro relativo apresenta alguma oscilação, permanecendo, no entanto, inferior a 5%. Para além disto, verifica-se que a simulação utilizando rácios  $a/h$  superiores resulta numa menor diferença relativamente aos valores exatos, o que se justifica devido à minimização do erro da utilização da FSDT para laminados mais finos. Para os casos nos quais se considera um rácio  $a/h$  de 100 o erro relativo não ultrapassa os 0.25 %. As diferenças nos resultados obtidos podem ser justificadas pelo facto de as soluções analíticas utilizarem um fator de correção  $k$  de 5/6, diferente do utilizado nas simulações de elementos finitos realizadas pelo ANSYS.

### 3.5.2 Verificação dos Resultados da Frequência Natural Fundamental

De modo semelhante ao caso anterior, procedeu-se a uma comparação dos resultados obtidos através de simulação com a respetiva solução analítica, cujos valores foram obtidos de [6]. Assim, a 1ª frequência natural é obtida a partir da simulação e, posteriormente, adimensionalizada de acordo com a equação 3.1, por forma permitir uma comparação direta dos resultados. Na simulação, foi utilizado o elemento SHELL 281 com uma malha de 12 elementos por lado. Os resultados apresentados em (6) correspondem à utilização de uma formulação baseada na FSDT. Relativamente às condições fronteira, considerou-se mais uma vez que a placa se encontra simplesmente apoiada ao longo do seu rebordo, de acordo com as condições SS1. Foi realizada simulação para duas relações  $a/h$  e para dois materiais diferentes, implementada através da utilização de duas relações  $E_{11}/E_{22}$  distintas. Os resultados desta simulação, bem como os valores das soluções exatas, são apresentados na Tabela 3.5.2.

Tabela 3.5.2 - Valores da frequência natural fundamental (adimensional), obtidos para o estudo de validação.

	$E_{11}/E_{22} = 25$		$E_{11}/E_{22} = 40$	
	(Reddy, 2003)	Presente Estudo	(Reddy, 2003)	Presente Estudo
<b><math>a/h = 20</math></b>				
[0/90]	9,474	9,473	10,840	10,817
[0/90] <sub>4</sub>	14,241	14,080	17,169	16,835
<b><math>a/h = 100</math></b>				
[0/90]	9,687	9,687	11,150	11,150
[0/90] <sub>4</sub>	14,912	14,903	18,419	18,349

A análise dos valores apresentados na Tabela 3.5.2 permite concluir que os valores da frequência natural fundamental adimensional, obtidos a partir do modelo, se aproximam de modo satisfatório das soluções exatas obtidas a partir de uma formulação analítica. Os erros relativos são, em todos os casos, reduzidos, nunca ultrapassando os 2%. A utilização de rácios  $a/h$  superiores conduz, mais uma vez, a erros relativos mais baixos, devido à minimização do erro da utilização da FSDT para laminados mais finos. Para além disso, verifica-se que a modelação de um maior número de lâminas leva a um aumento do erro relativo. Realizando uma comparação direta, é possível concluir que a sequência de empilhamento [0/90]<sub>4</sub> de 8 lâminas conduz, em todos os casos, a uma pior aproximação da solução exata que a sequência [0/90], que possui apenas 2 camadas.

### 3.6 Número de Níveis $\alpha$ Considerados na Simulação

A escolha do número de  $\alpha$  – cuts utilizados para definir a função de pertinência *fuzzy* dos parâmetros de entrada é importante, uma vez que irá condicionar o número de  $\alpha$  – cuts da função de pertinência resultante da simulação. Por um lado, a utilização de um elevado número de níveis  $\alpha$  permite obter funções de pertinência definidas por um maior número de intervalos e, consequentemente, obter gráficos cuja forma apresenta transições menos abruptas. Por outro lado, este aumento do número de  $\alpha$  – cuts acarreta um aumento considerável do número de cálculos a realizar pelo modelo, ou seja, resulta num aumento do custo computacional. Pretende-se, assim, encontrar um balanço entre a precisão das funções de pertinência obtidas e o custo computacional da simulação. Para tal, irá realizar-se a comparação de três casos distintos. Nos três casos os parâmetros de modelação escolhidos são exatamente iguais, com exceção do número de  $\alpha$  – cuts. Assim, realizam-se simulações utilizando 3, 6 e 11  $\alpha$  – cuts.

Neste estudo simularam-se resultados para uma placa de compósito laminado com uma sequência de empilhamento de  $[0\ 90]_2$ . Considera-se que existe incerteza ao nível dos ângulos de orientação das fibras de todas as lâminas, sendo esta incerteza representada por uma função de pertinência *fuzzy* triangular. A título de exemplo, na Figura 3.4 encontram-se representadas as funções de pertinência para os ângulos das fibras de duas das lâminas, mais concretamente aquelas que possuem um ângulo nominal de  $0^\circ$ . Apesar de não estarem representadas, para as lâminas com um ângulo nominal de  $90^\circ$  utiliza-se exatamente o mesmo tipo de função, considerando-se também um desvio máximo (para  $\alpha = 0$ ) de  $2^\circ$ .

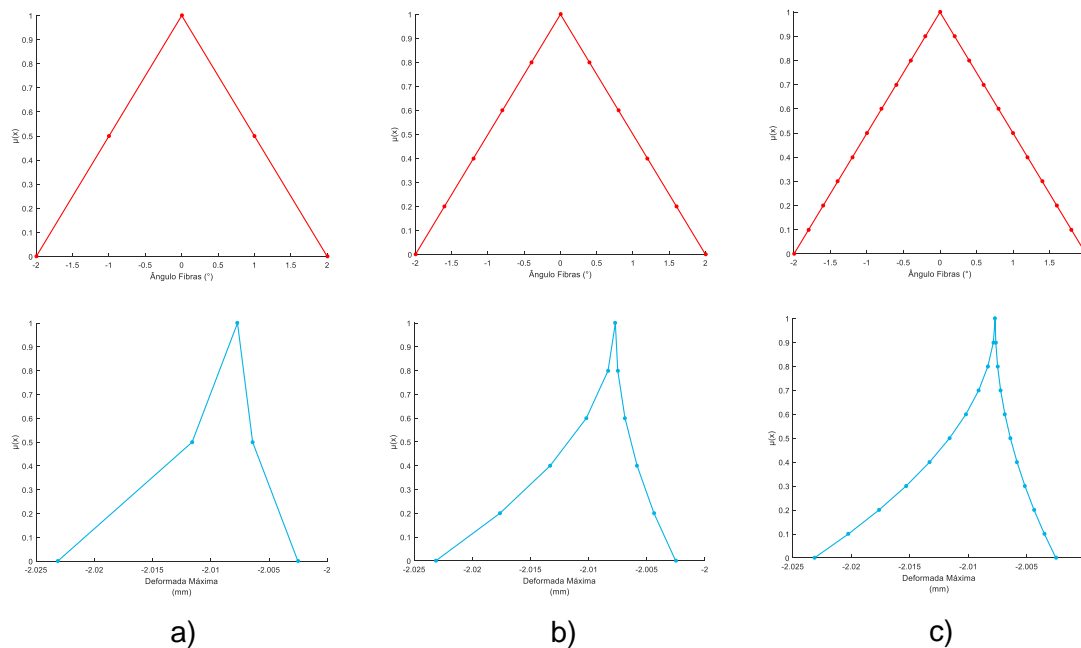


Figura 3.4 - Gráficos das funções de pertinência *fuzzy* dos ângulos das fibras e das respectivas deformada máximas: a) 3  $\alpha$ -cut b) 6  $\alpha$ -cut c) 11  $\alpha$ -cut

Na Figura 3.4 são apresentados os gráficos das funções de pertença da deformada máxima correspondentes ao uso do respetivo parâmetro de entrada acima, ou seja, obtidos considerando um número crescente de  $\alpha - cuts$ . Como se pode observar, a forma da função de pertença dos parâmetros de entrada mantém-se constante quando se realiza o incremento do número de  $\alpha - cuts$ . Por outro lado, de acordo com a Figura 3.4, a função de pertença da deformada máxima apresenta variações consideráveis. De facto, é notório que, para o caso da utilização de apenas 3 níveis  $\alpha$ , o gráfico da função de pertença da deformada apresenta transições abruptas. Assim, não será possível retirar conclusões significativas relativamente à função de pertença da resposta, pois esta afasta-se consideravelmente das funções obtidas com um maior número de  $\alpha - cuts$ . As diferenças entre os casos nos quais se considera 6 e 11  $\alpha - cuts$  são consideravelmente menores, verificando-se que os gráficos das funções apresentam uma forma muito próxima. Do ponto de vista dos valores dos intervalos obtidos para um mesmo nível  $\alpha$ , tal como seria de esperar, não existe qualquer diferença entre os três casos.

Relativamente ao tempo necessário para completar a simulação, verificou-se serem necessários, em termos médios, 111 segundos para o caso com 3 níveis  $\alpha$ , 273 segundos para o caso com 6 níveis e 528 segundos quando se consideram 11 níveis. Assim, verifica-se que o segundo caso demora mais do dobro do primeiro, o que representa um aumento considerável no tempo de simulação. No entanto, tal como se referiu anteriormente, os resultados obtidos utilizando apenas 3  $\alpha - cut$  afastam-se demasiado da forma final da função. Na comparação entre o segundo e o terceiro caso, verifica-se um aumento de cerca de 93 % no tempo de simulação. Contudo, a forma das funções obtidas é semelhante, não existindo assim diferenças significativas entre os dois casos. Desta forma, nos casos de estudo analisados neste trabalho optou-se por realizar simulação com recurso a 6  $\alpha - cut$ . Isto permite definir funções de pertença da resposta a partir de uma quantidade de informação adequada, mantendo tempos de simulação computacional aceitáveis.



## 4. Casos de Estudo

---

Através da utilização de funções de pertença *fuzzy* para descrever a incerteza nos parâmetros de entrada é possível, com recurso ao modelo apresentado no Capítulo 3, obter as funções de pertença da deformada máxima e da frequência natural fundamental de uma estrutura. Desta forma, podemos caracterizar a variabilidade da resposta estrutural através da função de pertença *fuzzy* obtida. Para tal, foram modelados diferentes casos de estudo. Nestes casos de estudo são consideradas incertezas nos valores dos ângulos de orientação das fibras, da espessura laminar e de diferentes propriedades mecânicas das lâminas. A simulação foi realizada para diferentes sequências de empilhamento e relações  $a/h$ , por forma a verificar se estas influenciam, de algum modo, a forma e os intervalos das funções de pertença *fuzzy* de resposta.

### 4.1 Parâmetros Gerais da Análise

#### 4.1.1 Tipos de Análise e Respetivas Condições Fronteira

Para que seja possível caracterizar, de forma abrangente, a variabilidade das respostas estruturais causada pela incerteza, procedeu-se à realização de dois tipos de análise distintos, sendo estas a análise estática e análise dinâmica. No caso da análise estática, considerou-se que a placa se encontra sujeita a uma carga aplicada transversalmente na superfície superior (que corresponde à lâmina superior), sob a forma de uma pressão uniformemente distribuída. A variável de resposta analisada corresponde ao valor da deformada transversal máxima resultante. No caso da análise dinâmica realiza-se, em primeiro lugar, uma análise modal com o objetivo de determinar a variabilidade da frequência natural fundamental da placa. Em ambos os casos os resultados são apresentados na sua forma adimensional, tendo sido utilizadas as Equações 3.1 e 3.2 para proceder à adimensionalização, respetivamente, da deformada máxima e da frequência natural. Por forma a estabelecer os efeitos da incerteza na variabilidade para um espetro mais alargado de frequências, é realizada uma análise harmónica, com o objetivo de determinar a função de resposta em frequência da placa (FRF) para o deslocamento transversal. No que diz respeito aos parâmetros da análise harmónica, é aplicada uma carga sinusoidal de valor unitário no nó central da placa, sendo a resposta obtida num nó localizado a  $a/4$  do ponto de aplicação da carga, de acordo com o apresentado na Figura 4.1. Para todos os casos de estudo e tipos de análise realizadas, considerou-se que a placa se encontra simplesmente apoiada ao longo de todo o seu comprimento lateral. Estas condições fronteira foram implementadas no modelo de elementos

finitos através da aplicação os constrangimentos de tipos SS-1, que se encontram definidos na secção 3.2.1.3.

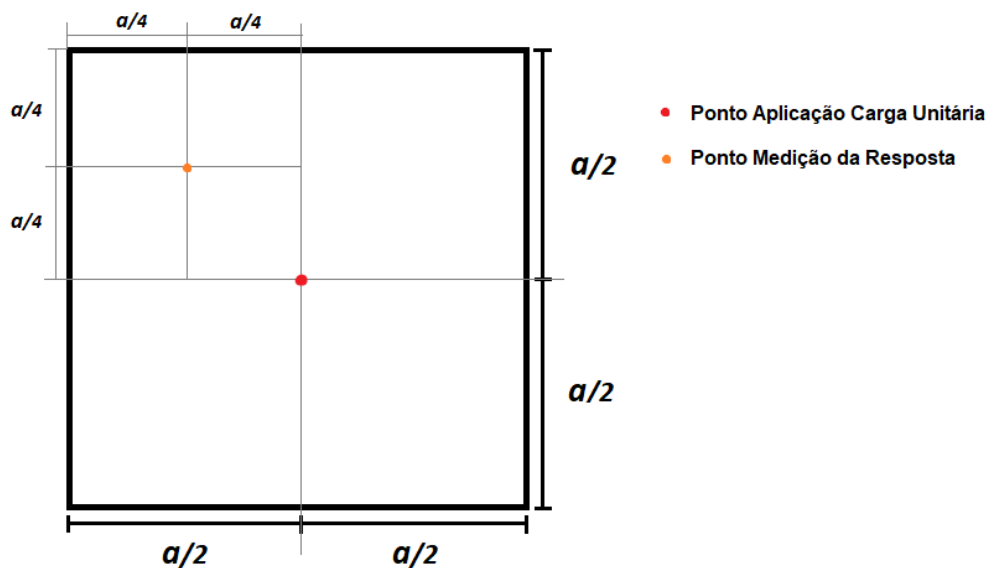


Figura 4.1 – Localização dos pontos de aplicação da carga e medição da resposta para a análise harmónica.

#### 4.1.2 Estrutura Analisada

Nos diferentes casos de estudo que se apresentam de seguida, tanto para as análises estáticas como para as análises dinâmicas, escolheu-se como estrutura uma placa quadrada, constituída por lâminas de material compósito reforçado por fibras unidireccionais contínuas. Relativamente às sequências de empilhamento, foram simuladas diferentes possibilidades, que se encontram identificadas com o respetivo caso de estudo. Ao definir-se a sequência de empilhamento do laminado, o primeiro ângulo apresentado corresponde à camada nº1, que será a camada inferior da placa, e assim sucessivamente. As dimensões da placa variam também com o caso de estudo, uma vez que se encontram dependentes do rácio entre o comprimento do lado da placa ( $a$ ) e a espessura total do laminado ( $h$ ). A escolha de uma estrutura relativamente simples, como é o caso de um painel quadrado, permite determinar de forma direta e sem interferência de outros fatores a influência da incerteza na variabilidade de resposta. Assim, o estudo de uma placa quadrada permite estabelecer resultados de base que poderão servir de referência na análise de estruturas mais complexas.

#### 4.1.3 Propriedades do Material

Em todos os casos de estudo para os quais se realizou simulação, considerou-se a utilização de um pré-impregnado constituído por uma matriz epoxy (designação comercial HexPly 8552)

reforçada por fibras de carbono (designação comercial HexTow IM7) no fabrico da placa de compósito laminado. Trata-se de uma combinação tipicamente utilizada em aplicações estruturais, nomeadamente na construção de estruturas aeroespaciais. As propriedades mecânicas, fornecidas pelo fabricante, que foram consideradas na modelação do laminado IM7/8552UD, são apresentadas na Tabela 4.1.1.

Tabela 4.1.1 - Propriedades do laminado pré-impregnado (IM7/8552UD Hexcel Composites).

$E_{11}$ [GPa]	$E_{22}, E_{33}$ [GPa]	$G_{12}, G_{13}$ [GPa]	$G_{23}$ [GPa]	$\nu_{12}, \nu_{13}$ [GPa]	$\nu_{23}$ [GPa]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
161	11.38	5.17	3.98	0.32	0.44	1500

#### 4.1.4 Métricas de Análise de Resultados

Para que seja possível interpretar de forma mais objetiva os resultados obtidos para os diferentes casos de estudo, aplicaram-se algumas métricas de análise a estes mesmos resultados. A utilização destas métricas é feita para as situações nas quais se obtém funções de pertença *fuzzy* a partir do modelo, ou seja, para os casos da análise estática e da análise modal.

Com o objetivo de avaliar como evolui a dimensão dos intervalos obtidos para cada um dos  $\alpha$  – *cut*, aplicou-se uma métrica que realiza a comparação entre estes intervalos e o valor obtido para  $\alpha = 1$ , ou seja, o valor correspondente à análise determinística. Assim, é possível quantificar a amplitude do intervalo de valores obtido em termos da percentagem do valor determinístico. A fórmula aplicada no cálculo desta métrica é a seguinte,

$$\text{Amplitude Intervalo} = \frac{|\bar{u} - \underline{u}|}{|u_{\alpha=1}|} \times 100 \quad (4.1)$$

Por forma a que seja possível realizar uma comparação do tipo de funções de pertença *fuzzy* de resposta obtidas, recorre-se à métrica de desvio normalizado. O desvio normalizado permite situar os extremos dos intervalos para cada nível  $\alpha$  relativamente ao valor nominal (para  $\alpha = 1$ ), fazendo uso de uma escala normalizada. A equação utilizada para realizar a normalização dos resultados é a seguinte,

$$\text{Desvio Normalizado} = \frac{u - \min(u_{\alpha=0}, \dots, u_{\alpha=1})}{\max(u_{\alpha=0}, \dots, u_{\alpha=1}) - \min(u_{\alpha=0}, \dots, u_{\alpha=1})} \quad (4.2)$$

## 4.2 Incerteza na Orientação das Fibras

Na Tabela 4.2.1 são apresentados os parâmetros do modelo utilizados na simulação de cada um dos casos de estudo considerados neste trabalho, para análise das respostas estáticas e dinâmicas de uma placa de compósito laminado IM7/8552UD sujeita a incerteza nos ângulos de orientação das fibras.

Tabela 4.2.1 - Casos de estudo considerando incerteza nos ângulos de empilhamento.

Caso de Estudo	$a/h$	Sequência de Empilhamento	$\theta_{lamina}$ ( $\alpha = 1$ )	$\Delta\theta_{lamina}$ ( $\alpha = 0$ )
1.1	20	$[0]_4$	Valor Nominal	$\pm 2^\circ$
1.2		$[0/90]_s$		
1.3		$[0/90]_2$		
2.1	100	$[0]_4$	Valor Nominal	$\pm 2^\circ$
2.2		$[0/90]_s$		
2.3		$[0/90]_2$		

Nos casos de estudo 1.X e 2.X realizou-se a simulação considerando incerteza nos ângulos de orientação das fibras de todas as lâminas da placa. Considerou-se que a incerteza nos ângulos das fibras de cada lâmina é representada por uma função de pertinência *fuzzy* triangular, de valor médio (para  $\alpha = 1$ ) igual ao valor nominal e apresentando um desvio máximo (para  $\alpha = 0$ ) de  $2^\circ$  relativamente ao valor médio. Adicionalmente, no caso 1.2, realizou-se a simulação considerando incerteza nos ângulos das fibras de cada uma das lâminas individualmente. Nesta análise considera-se uma função de pertinência fuzzy para descrever os ângulos das fibras de uma única lâmina, sendo que o valor dos ângulos nas restantes camadas permanece igual ao valor nominal. Na Figura 4.2 apresentam-se os gráficos das funções de pertinência fuzzy que descrevem os ângulos das fibras, de acordo com o que foi referido anteriormente, para os casos 1.X e 2.X.

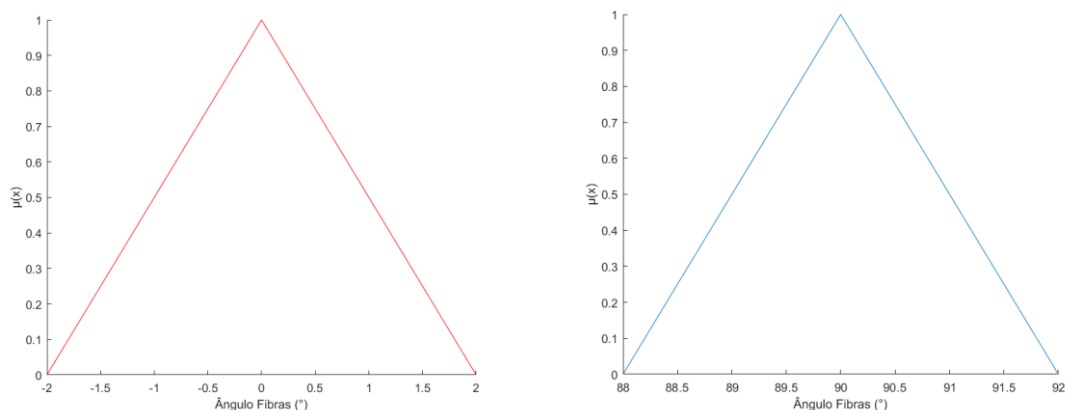


Figura 4.2 - Gráficos das funções de pertinência fuzzy para os ângulos das fibras de uma lâmina (ângulos de  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , respetivamente).

## 4.2.1 Resultados Simulação Estática

### Laminado $[0]_4$

Nos casos de estudo nos quais se analisou a sequência de empilhamento de  $[0]_4$ , a orientação das fibras é igual em todas as camadas, pelo que a função de pertinência para o ângulo das fibras é comum a todas as lâminas. Relativamente aos resultados da simulação, os gráficos das funções de pertinência *fuzzy* da deformada máxima da placa que foram obtidos para os casos de estudo 1.1 e 2.1 encontram-se representadas na Figura 4.3. A Tabela 4.2.2 apresenta os intervalos de valores obtidos para cada um dos  $\alpha$  – *cut* considerados.

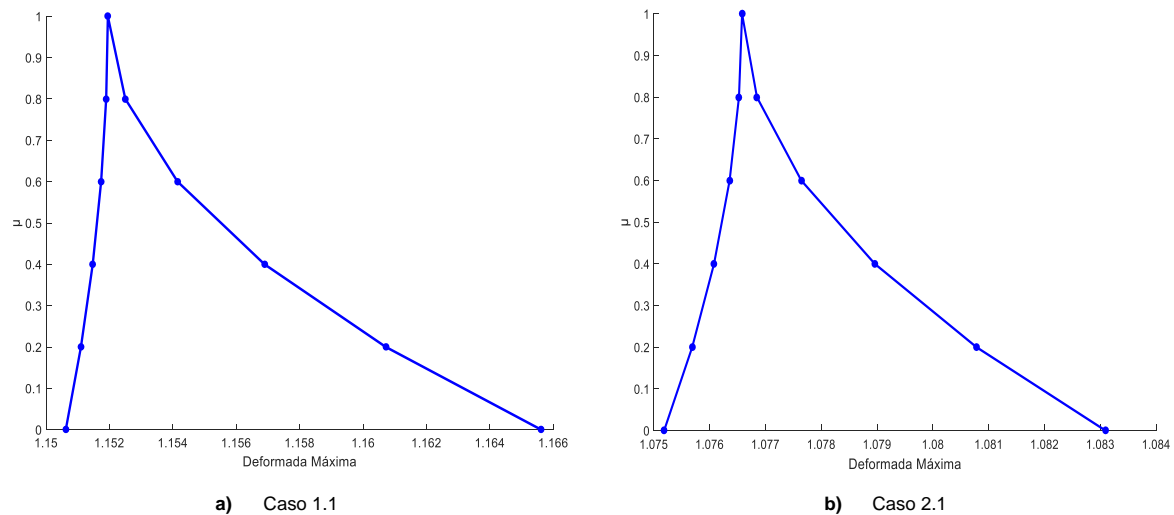


Figura 4.3 - Gráficos das funções de pertinência *fuzzy* da deformada máxima adimensional (casos 1.1 e 2.1).

Tabela 4.2.2 - Resultados da simulação estática para os casos de estudo 1.1 e 2.1.

$\alpha$	Caso 1.1				Caso 2.1			
	Deformada Máxima Adimensional	Amplitude Intervalo (%)	Desvio Normalizado		Deformada Máxima Adimensional	Amplitude Intervalo (%)	Desvio Normalizado	
			$\underline{u}$	$\overline{u}$			$\underline{u}$	$\overline{u}$
0	[1,1506; 1,1656]	1,302	0,000	1,000	[1,0752; 1,0831]	0,735	0,000	1,000
0.2	[1,1511; 1,1607]	0,835	0,032	0,673	[1,0757; 1,0808]	0,473	0,064	0,708
0.4	[1,1515; 1,1569]	0,470	0,057	0,418	[1,0761; 1,0790]	0,268	0,113	0,478
0.6	[1,1517; 1,1541]	0,209	0,074	0,235	[1,0764; 1,0776]	0,119	0,148	0,311
0.8	[1,1519; 1,1525]	0,052	0,085	0,125	[1,0765; 1,0768]	0,030	0,170	0,210
1	1,1519				1,0766			

Analisando os resultados obtidos verifica-se, que tanto para o caso 1.1 ( $a/h=20$ ) como para o caso 2.1 ( $a/h=100$ ) se obtém uma função de pertinência *fuzzy* com um claro deslocamento para a

esquerda, ou seja, para os valores de deformada mais reduzidos. Isto implica que o limite inferior dos vários intervalos não varia significativamente (declive da função à esquerda do ponto para  $\alpha = 1$  é praticamente vertical). Por outro lado, implica também uma elevada variação dos limites superiores. O rácio  $a/h$  parece não influenciar significativamente a forma da função de pertença obtida, provocando apenas um ligeiro deslocamento dos valores médios para o centro. Para além disso, apesar do caso 2.1 apresentar valores de deformada adimensional consideravelmente menores que os de 1.1, verifica-se que a amplitude dos intervalos é superior em 1.1 (aproximadamente o dobro). A evolução desta amplitude é, no entanto, bastante semelhante em ambos os casos. É de referir que a simulação para um  $\alpha - cut$  de 1 corresponde a um caso nos quais se utilizam os valores médios dos ângulos, ou seja, na qual se considera o seu valor nominal. Desta forma, não se obtém um intervalo, mas sim um valor que corresponde ao resultado de uma análise exata.

### Laminado $[0\ 90]_s$

#### *Incerteza nos ângulos das fibras de todas as lâminas*

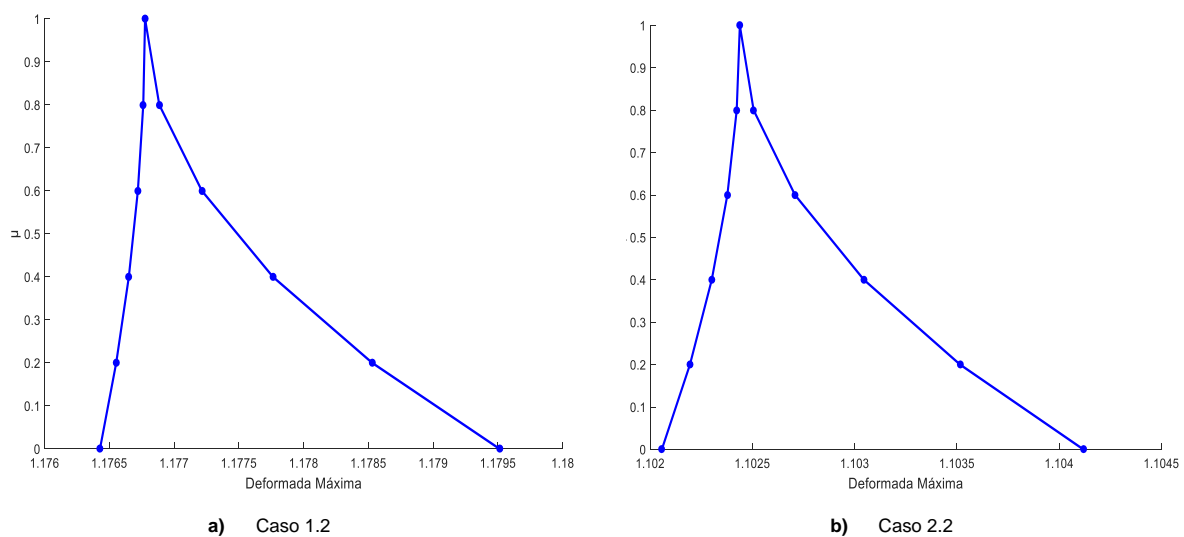


Figura 4.4 - Gráficos das funções de pertença *fuzzy* da deformada máxima adimensional (casos 1.2 e 2.2).

Nos casos de estudo 1.2 e 2.2 é simulada a resposta de um laminado de quatro camadas com uma sequência de empilhamento simétrica. Isto implica que as camadas intermédias partilham o ângulo de orientação das fibras ( $90^\circ$ ) e, portanto, a função de *membership fuzzy* para o ângulo das fibras. O mesmo acontece com as camadas exteriores, mas para um ângulo de  $0^\circ$ . Na Figura 4.4 apresentam-se os gráficos das funções de pertença da deformada máxima da placa para os

casos de estudo 1.2 e 2.2. A Tabela 4.2.3 apresenta os valores dos intervalos obtidos para cada um dos  $\alpha$  – cut considerados.

Para os casos de estudo 1.2 e 2.2 verifica-se, tal como para o caso anterior, uma tendência para obter funções de pertença *fuzzy* com um deslocamento para os valores de deformada mais reduzidos (esquerda do gráfico). No entanto, é notório que o aumento do rácio  $a/h$  provoca o deslocamento dos valores médios para a direita, uma vez que no caso 2.2 os declives das secções à esquerda e direita do ponto de  $\alpha = 1$  são mais próximos do que para o caso 1.1. Relativamente à amplitude dos intervalos obtidos, esta é ligeiramente superior no caso 1.1. No entanto, tanto os valores da amplitude como a sua evolução ao longo dos  $\alpha$  – cut é bastante semelhante em ambos os casos.

*Tabela 4.2.3 - Resultados da simulação estática para os casos de estudo 1.2 e 2.2.*

$\alpha$	Caso 1.2				Caso 2.2			
	Deformada Máxima Adimensional	Amplitude Intervalo (%)	Desvio Normalizado		Deformada Máxima Adimensional	Amplitude Intervalo (%)	Desvio Normalizado	
			$\underline{u}$	$\bar{u}$			$\underline{u}$	$\bar{u}$
0	[1,1764; 1,1795]	0,262	0,000	1,000	[1,1021; 1,1041]	0,187	0,000	1,000
0.2	[1,1766; 1,1785]	0,168	0,041	0,681	[1,1022; 1,1035]	0,120	0,067	0,708
0.4	[1,1767; 1,1778]	0,095	0,072	0,433	[1,1023; 1,1030]	0,068	0,118	0,479
0.6	[1,1767; 1,1772]	0,042	0,095	0,255	[1,1024; 1,1027]	0,030	0,155	0,316
0.8	[1,1768; 1,1769]	0,011	0,108	0,148	[1,1024; 1,1025]	0,008	0,178	0,218
1	1,1768				1,1024			

### ***Incerteza no ângulo das fibras de uma lâmina***

Tal como foi referido na apresentação dos casos de estudo, para as condições do caso 1.2, realizou-se a simulação da variabilidade da deformada considerando incerteza no ângulo de cada uma das lâminas individualmente. Os ângulos das fibras das lâminas que se considera não estarem sujeitas a incerteza permanecem constantes e iguais ao valor nominal. Foram assim realizadas quatro simulações diferentes, com o objetivo de obter uma função de pertença *fuzzy* da resposta para cada uma das situações. Os gráficos destas funções de pertença são apresentados na Figura 4.5.

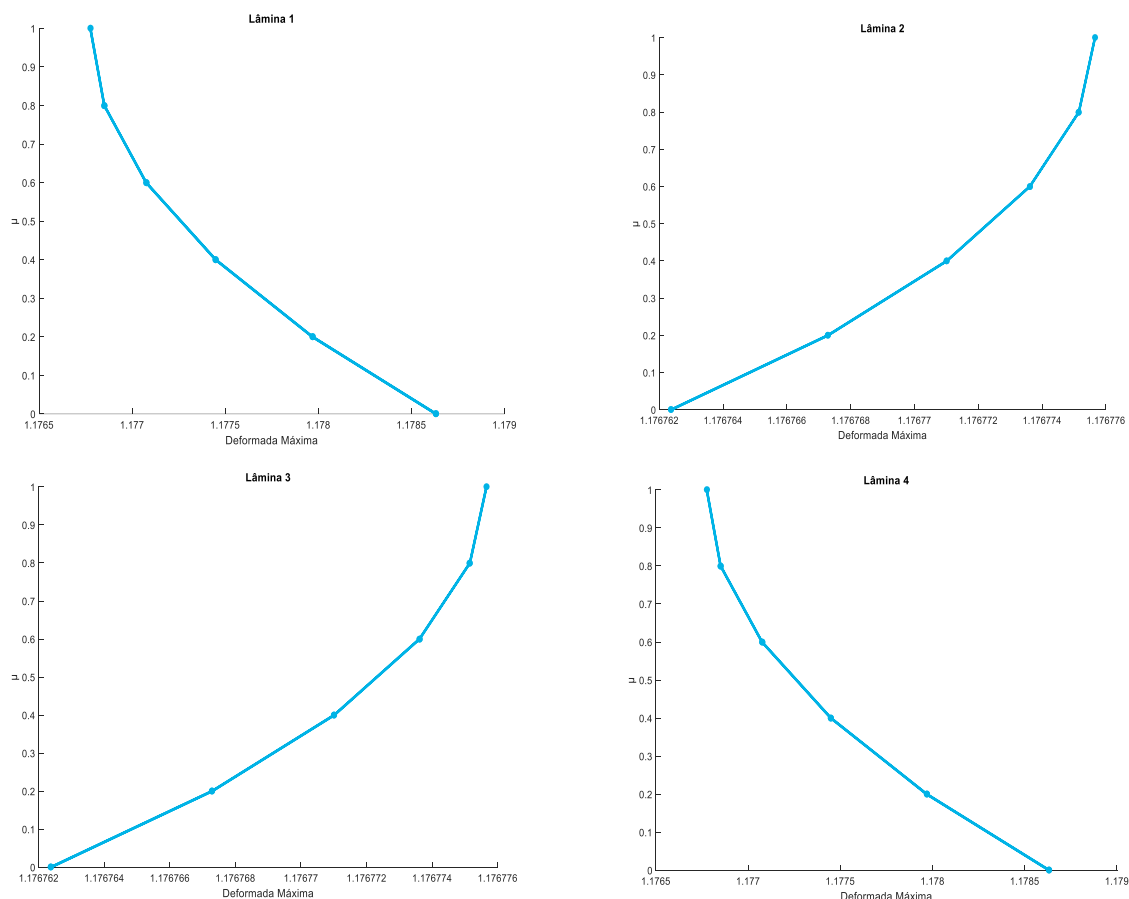


Figura 4.5 - Gráfico da função de pertença *fuzzy* da deformada máxima da placa (Incerteza nos ângulos da lâmina 1, 2, 3 e 4, respetivamente).

Relativamente às funções de pertença *fuzzy* obtidas, verifica-se que estas são definidas, em cada  $\alpha - cut$ , não por um intervalo (de acordo com o que acontecia nos casos anteriores), mas sim por um ponto. Isto acontece devido ao fato de se utilizarem funções de pertença triangulares simétricas, de acordo com o que se explica de seguida.

Para uma lâmina com fibras orientadas segundo ângulos diferentes, mas a igual distância de um dado valor médio, o resultado da deformada máxima resultante da flexão é igual para ambos os casos. Assim, a título de exemplo, a utilização de uma lâmina orientada a  $88^\circ$  irá produzir os mesmos valores de deformada que uma lâmina orientada a  $92^\circ$ , para o caso considerado. Isto acontece devido ao facto de estarmos a considerar placas de geometria quadrada.

Uma vez que, nesta simulação, se considera incerteza ao nível de uma única lâmina, existem apenas duas possibilidades distintas para as combinações de valores dos parâmetros de entrada, para cada  $\alpha - cut$ . Em ambas as combinações o valor do ângulo das fibras de três das camadas é constante. Assim, a distinção entre as duas combinações consiste em considerar o valor máximo ou o valor mínimo do ângulo para a lâmina sujeita a incerteza. Em cada  $\alpha - cut$ , o valor mínimo



e o valor máximo estão a igual distância do valor médio, uma vez que se considerou uma função de pertinência triangular simétrica para descrever o parâmetro de modelação sujeito a incerteza. Desta forma, o resultado obtido para a deformada é igual para ambas as combinações de valores dos parâmetros de entrada. Assim, ao representar graficamente a função de pertinência, teremos pontos coincidentes em cada  $\alpha$ , pelo que não é possível estabelecer os intervalos de resposta apresentados nos casos anteriores. Analisando os gráficos das funções de pertinência obtidas, verificam-se algumas diferenças de acordo com a lâmina que se considera estar sujeita a incerteza. Quando se considera incerteza ao nível dos ângulos das fibras da lâmina 1 ou da lâmina 4 (lâmina inferior e superior, respetivamente), obtêm-se funções de pertinência cuja forma indica maior possibilidade de ocorrência dos valores de deformada mais reduzidos. Por outro lado, ao considerar incerteza nos ângulos das fibras da lâmina 2 ou da lâmina 3, temos uma inversão desta situação, existindo maior possibilidade de ocorrência dos valores de deformada mais elevados. Contudo, a incerteza nos ângulos das fibras das lâminas exteriores conduz a uma maior variabilidade dos valores da deformada, comparativamente com a incerteza nos ângulos das fibras das lâminas intermédias. Isto acontece devido à maior distância das lâminas exteriores ao plano médio do laminado, que resulta numa maior influência no 2º momento de área.

### Laminado $[0\ 90]_2$

Nos casos 1.3 e 2.3 realiza-se simulação para um laminado de 4 camadas, com uma sequência de empilhamento não simétrica. Este empilhamento consiste numa sequência alternada de lâminas com fibras orientadas a 0 e 90 graus. Na Figura 4.6 apresentam-se os gráficos das funções de pertinência da deformada máxima da placa, que resultaram da simulação para os casos 1.3 e 2.3. A Tabela 4.2.4 apresenta os valores dos intervalos obtidos.

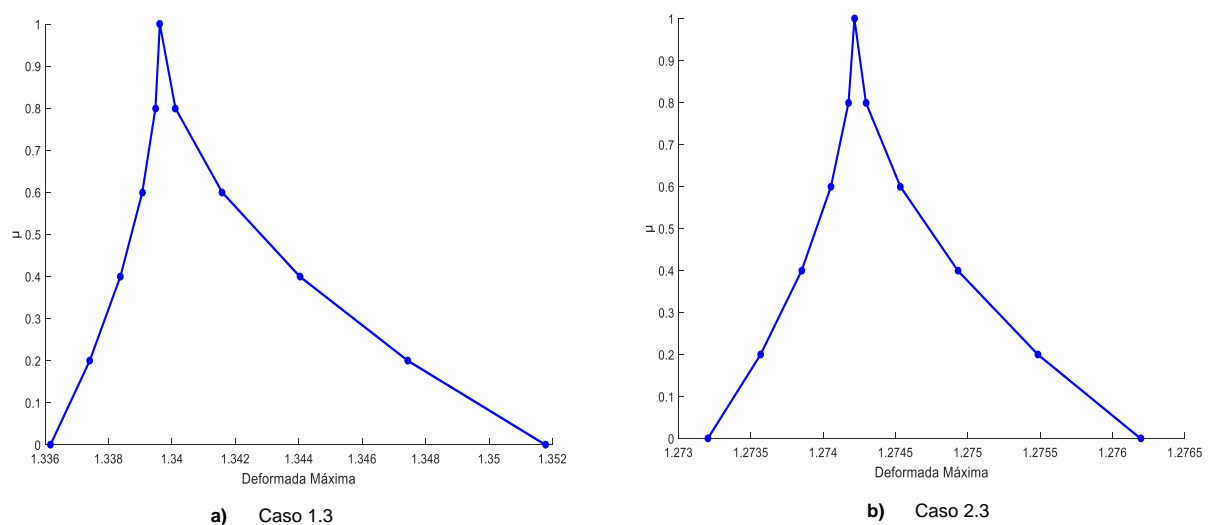


Figura 4.6 - Gráficos das funções de pertinência *fuzzy* da deformada máxima adimensional (Casos 1.3 e 2.3, respetivamente).

A partir da Figura 4.6 podemos concluir que, apesar de um ligeiro deslocamento para os valores de deformada mais reduzidos, os gráficos das funções de pertença obtidos para os casos 1.3 e 2.3 se aproximam de uma função de pertença triangular simétrica, especialmente no caso de estudo 2.3, no qual se considera um rácio  $a/h$  superior. Relativamente à amplitude dos intervalos obtidos, esta é superior para o caso 1.3. A evolução destes mesmo intervalo ao longo dos diferentes  $\alpha - cut$  é, no entanto, semelhante.

Tabela 4.2.4 - Resultados da simulação estática para os casos de estudo 1.3 e 2.3.

$\alpha$	Caso 1.3				Caso 2.3			
	Deformada Máxima (mm)	Amplitude Intervalo (%)	Desvio Normalizado		Deformada Máxima (mm)	Amplitude Intervalo (%)	Desvio Normalizado	
			$\underline{u}$	$\overline{u}$			$\underline{u}$	$\overline{u}$
0	[1,3362; 1,3518]	1,166	0,000	1,000	[1,2732; 1,2762]	0,235	0,000	1,000
0.2	[1,3374; 1,3474]	0,749	0,079	0,722	[1,2736; 1,2755]	0,151	0,122	0,763
0.4	[1,3384; 1,3440]	0,423	0,141	0,504	[1,2739; 1,2749]	0,085	0,217	0,578
0.6	[1,3391; 1,3416]	0,188	0,185	0,347	[1,2741; 1,2745]	0,038	0,285	0,445
0.8	[1,3395; 1,3401]	0,047	0,212	0,252	[1,2742; 1,2743]	0,009	0,325	0,366
1	1,3396				1,2742			

### ***Influência da Sequência de Empilhamento***

Ao realizar uma comparação entre os gráficos das funções de pertença obtidos para os diferentes casos de estudo verifica-se que, para além do rácio  $a/h$ , a sequência de empilhamento tem também influência na forma obtida. Uma vez que, nos vários casos de estudo analisados, o único parâmetro do modelo que varia é a sequência de empilhamento, é notório que esta influencia a variabilidade da resposta. De fato, a utilização de uma sequência de empilhamento não simétrica (como nos casos de estudo 1.3 e 2.3) conduziu à obtenção de uma função de pertença que se aproxima de uma condição de simetria em torno de um eixo vertical. Nos casos em que se considera simetria no empilhamento, verifica-se um claro deslocamento das funções de pertença para a direita, o que indica uma maior possibilidade de ocorrência de valores de deformada mais reduzidos. Isto implica também que os limites superiores dos intervalos para o valor da deformada têm uma menor variação, comparativamente com os limites inferiores. Relativamente às amplitudes dos intervalos obtidos, os valores são muito semelhantes entre casos com diferentes sequências de empilhamento, pelo que este parâmetro não parece ser influenciado de forma significativa.

## 4.2.2 Resultados Simulação Dinâmica - Frequência Natural Fundamental

### Laminado $[0]_4$

Os gráficos das funções de pertença da frequência natural fundamental (adimensionalizada) da placa, que foram obtidos para os casos de estudo 1.1 e 2.1, encontram-se representadas na Figura 4.7. A Tabela 4.2.5 apresenta os intervalos de valores obtidos para cada um dos  $\alpha$  – cut considerados.

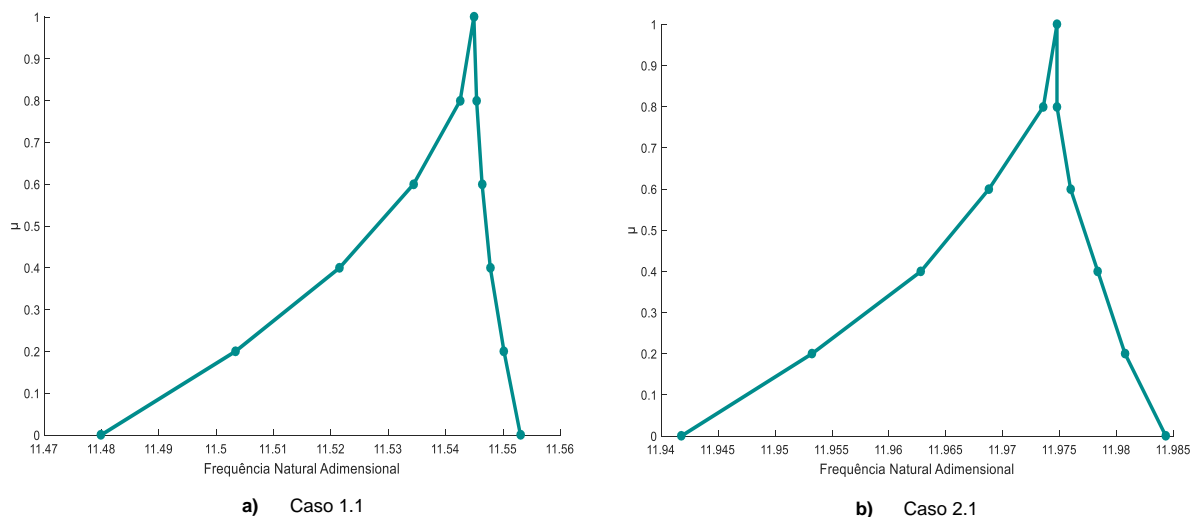


Figura 4.7 - Gráficos das funções de pertença *fuzzy* da frequência natural fundamental adimensional (Casos 1.1 e 2.1, respetivamente)

Analisando os resultados obtidos verifica-se que tanto, para  $a/h$  igual a 20, como para  $a/h$  igual 100, as funções de pertença *fuzzy* apresentam um deslocamento para os valores de frequência natural (fundamental) mais elevados, ou seja, para a direita nos respetivos gráficos. Os valores de desvio normalizado mostram que este deslocamento é mais pronunciado no caso 1.1, o que indica que rácios  $a/h$  superiores conduzem a maior variabilidade dos limites superiores dos intervalos para cada nível  $\alpha$ . Isto conduz à obtenção de funções de pertença definidas por intervalos cujas distâncias aos extremos da escala são mais próximas, levando ao deslocamento para o centro dos valores médios e consequente aproximação de uma condição de simetria. É possível também constatar que os valores da frequência natural são mais elevados quando se considera uma relação  $a/h$  de 100. Relativamente à amplitude dos intervalos obtidos, os valores para 1.1 são aproximadamente o dobro de 2.1. Isto indica uma maior variabilidade da resposta para rácios  $a/h$  inferiores. No entanto, em ambos os casos esta variabilidade é relativamente baixa, situando-se para todos os níveis  $\alpha$  abaixo de 1% do valor da simulação determinística. A evolução da amplitude dos intervalos é semelhante em ambos os casos.

Tabela 4.2.5 - Resultados da simulação dinâmica para os casos de estudo 1.1 e 2.1.

$\alpha$	Caso 1.1				Caso 2.1			
	Frequência Natural Fundamental Adimensional	Amplitude Intervalo (%)	Desvio Normalizado		Frequência Natural Fundamental Adimensional	Amplitude Intervalo (%)	Desvio Normalizado	
			$\underline{u}$	$\overline{u}$			$\underline{u}$	$\overline{u}$
0	[11,4799; 11,5530]	0,634	0,000	1,000	[11,9418; 11,9843]	0,355	0,000	1,000
0.2	[11,5033; 11,5502]	0,406	0,320	0,961	[11,9532; 11,9807]	0,230	0,270	0,916
0.4	[11,5215; 11,5478]	0,228	0,569	0,928	[11,9628; 11,9783]	0,130	0,494	0,860
0.6	[11,5344; 11,5464]	0,104	0,745	0,908	[11,9688; 11,9760]	0,060	0,635	0,803
0.8	[11,5425; 11,5454]	0,025	0,856	0,895	[11,9736; 11,9748]	0,010	0,747	0,775
1	11,5449		0,889		11,9748		0,775	

### Laminado $[0\ 90]_s$

Na Figura 4.8 apresentam-se gráficos das funções de pertinência da frequência natural fundamental (adimensionalizada) da placa, para os casos de estudo 1.2 e 2.2. A Tabela 4.2.6 apresenta os valores dos intervalos obtidos para cada um dos  $\alpha$  – cut considerados.

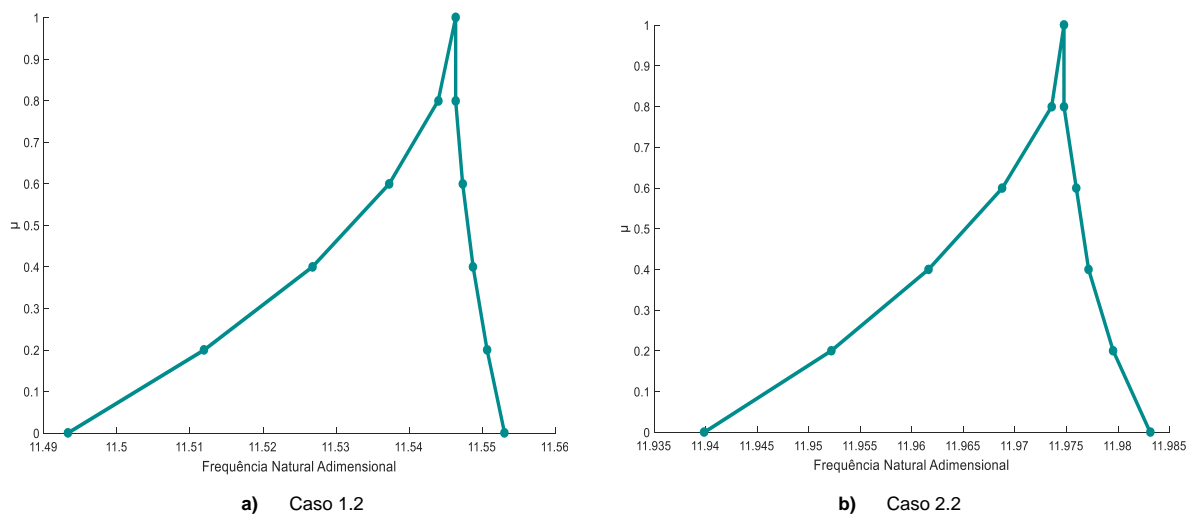


Figura 4.8 - Gráficos das funções de pertinência *fuzzy* da frequência natural fundamental adimensional (Casos 1.2 e 2.2, respetivamente)

Relativamente aos resultados para os casos 1.2 e 2.2 verifica-se, mais uma vez, a obtenção de funções de pertinência *fuzzy* com um deslocamento para os valores de frequência natural (fundamental) mais elevados. Da mesma forma que nos casos anteriores, este deslocamento é mais evidente quando se considera um rácio  $a/h$  de 20, verificando-se um deslocamento para a esquerda dos extremos dos intervalos obtidos quando se considera  $a/h$  igual a 100. Relativamente à amplitude dos intervalos, ambos os casos apresentam valores semelhantes, sendo que a

variabilidade será marginalmente superior no caso 1.2. A evolução desta amplitude ao longo dos diferentes níveis  $\alpha$  é muito semelhante em 1.2 e 2.2, com um decréscimo praticamente igual ao longo de  $\alpha$ .

Tabela 4.2.6 - Resultados da simulação dinâmica para os casos de estudo 1.2 e 2.2.

$\alpha$	Caso 1.2				Caso 2.2			
	Frequência Natural Fundamental Adimensional	Amplitude Intervalo (%)	Desvio Normalizado		Frequência Natural Fundamental Adimensional	Amplitude Intervalo (%)	Desvio Normalizado	
			$\underline{u}$	$\overline{u}$			$\underline{u}$	$\overline{u}$
0	[11,4933; 11,5530]	0,518	0,000	1,000	[11,9399; 11,9831]	0,361	0,000	1,000
0.2	[11,5119; 11,5507]	0,335	0,312	0,960	[11,9522; 11,9795]	0,229	0,285	0,917
0.4	[11,5267; 11,5487]	0,190	0,560	0,928	[11,9616; 11,9771]	0,130	0,503	0,862
0.6	[11,5373; 11,5473]	0,087	0,736	0,904	[11,9688; 11,9760]	0,060	0,669	0,834
0.8	[11,5440; 11,5464]	0,021	0,848	0,888	[11,9736; 11,9748]	0,010	0,779	0,807
1	11,5464		0,888		11,9748		0,807	

### Laminado [0 90]<sub>2</sub>

Na Figura 4.9 apresentam-se os gráficos das funções de pertença da frequência natural fundamental (adimensionalizada) da placa, que resultaram da simulação para os casos 1.3 e 2.3. A Tabela 4.2.7 apresenta os valores dos intervalos obtidos.

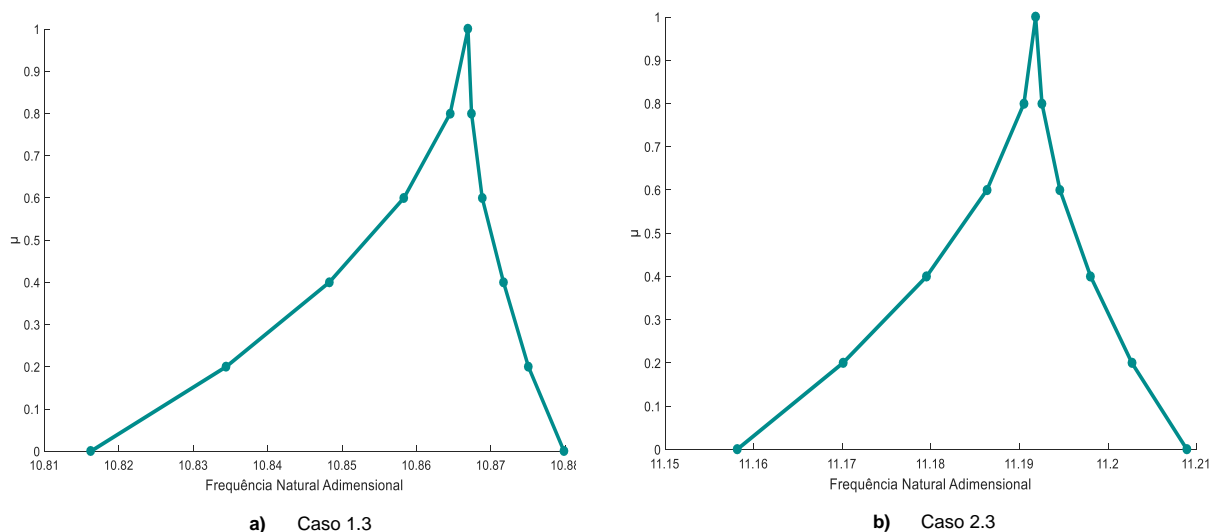


Figura 4.9 - Gráficos das funções de pertença *fuzzy* da frequência natural fundamental adimensional (Casos 1.3 e 2.3, respetivamente)

Como é possível constatar a partir dos resultados apresentados, as funções de pertença *fuzzy* resultantes da simulação apresentam, mais uma vez, um deslocamento para os valores de

frequência natural mais elevados (direita do gráfico). No entanto, uma análise dos valores de desvio normalizado evidencia o fato de as funções obtidas se encontrarem mais próximas de uma condição de simetria do que os casos anteriores. De fato, no caso 2.3 em que se considera uma relação  $a/h$  de 100, os extremos dos intervalos em cada nível  $\alpha$  estão relativamente equidistantes dos extremos da escala considerada. Assim, os limites superiores e inferiores dos intervalos apresentam uma variabilidade semelhante. Relativamente à amplitude dos intervalos, os valores obtidos são semelhantes em ambos os casos, verificando-se uma variabilidade ligeiramente no caso 1.3. A variação dos valores obtidos com o nível  $\alpha$  é muito semelhante em 1.3 e 2.3.

Tabela 4.2.7 - Resultados da simulação dinâmica para os casos de estudo 1.3 e 2.3.

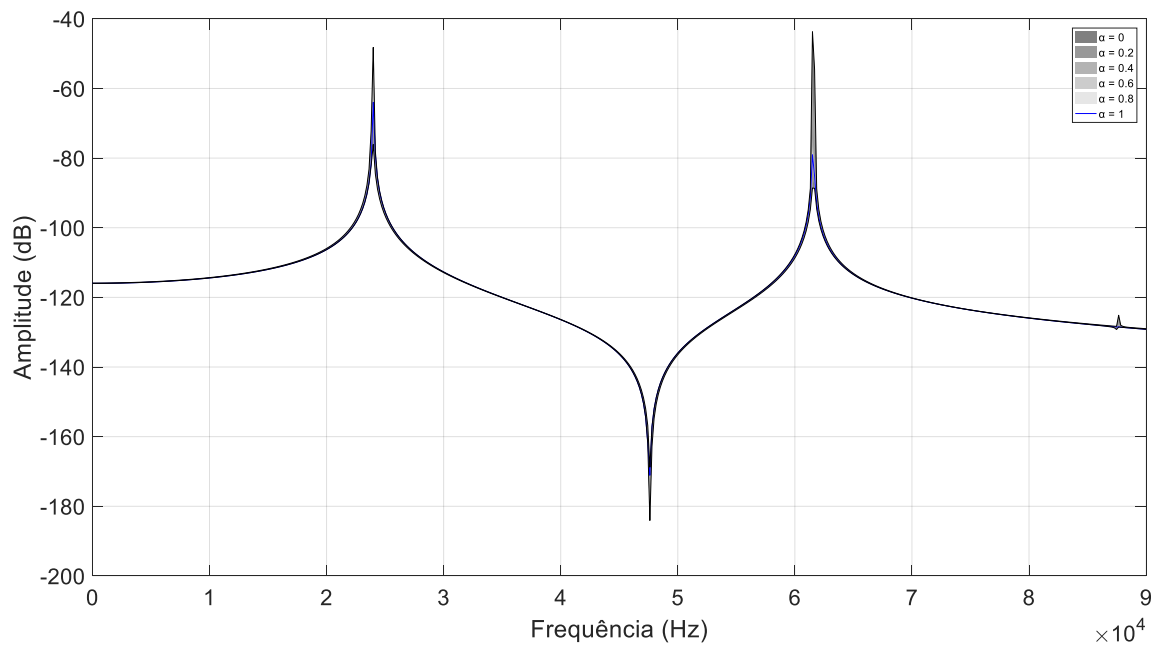
$\alpha$	Caso 1.3				Caso 2.3			
	Frequência Natural Fundamental Adimensional	Amplitude Intervalo (%)	Desvio Normalizado		Frequência Natural Fundamental Adimensional	Amplitude Intervalo (%)	Desvio Normalizado	
			$\underline{u}$	$\overline{u}$			$\underline{u}$	$\overline{u}$
0	[10,8162; 10,8798]	0,585	0,000	1,000	[11,1581; 11,2089]	0,454	0,000	1,000
0.2	[10,8344; 10,8751]	0,374	0,286	0,925	[11,1701; 11,2027]	0,292	0,235	0,878
0.4	[10,8483; 10,8717]	0,216	0,504	0,872	[11,1795; 11,1980]	0,166	0,421	0,786
0.6	[10,8583; 10,8688]	0,097	0,662	0,827	[11,1863; 11,1946]	0,074	0,555	0,718
0.8	[10,8645; 10,8674]	0,026	0,759	0,805	[11,1905; 11,1925]	0,018	0,638	0,678
1	10,8669		0,797		11,1918		0,664	

### *Influência da Sequência de Empilhamento*

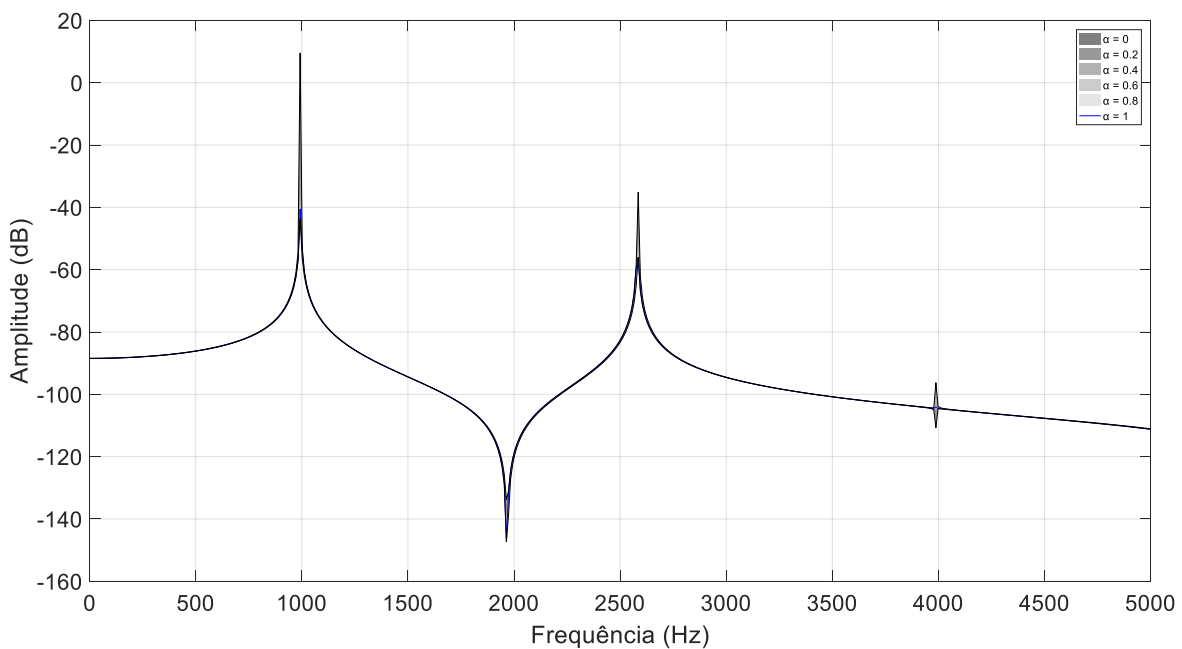
Ao realizarmos uma análise comparativa dos resultados da simulação para os casos 1.X e 2.X verifica-se a existência de alguma influência da sequência de empilhamento do laminado no tipo de função de pertença obtida. Assim, a utilização de sequências de empilhamento simétricas como  $[0]_4$  e  $[0\ 90]_s$  conduz, para a mesma relação  $a/h$ , à obtenção de funções com uma forma muito semelhante, tal como é possível constatar a partir da comparação dos valores do desvio normalizado. Por outro lado, a utilização de um empilhamento não-simétrico, produz funções de pertença com um deslocamento menos acentuado para a direita, comparativamente com os empilhamentos simétricos. Isto evidencia uma maior possibilidade de ocorrência de valores de frequência natural maiores no caso de empilhamentos simétricos, bem como uma maior rigidez dos limites superiores dos intervalos obtidos. Relativamente à variabilidade da resposta analisada, esta é ligeiramente superior para o empilhamento  $[0]_4$  sendo, no entanto, muito semelhante para todas as sequências de empilhamento. Relativamente aos valores obtidos, verifica-se que empilhamentos simétricos conduzem a frequências naturais maiores que as que são obtidas para empilhamentos não-simétricos.

### 4.2.3 Resultados Simulação Dinâmica - FRFs

#### Laminado $[0]_4$



a) Caso 1.1



b) Caso 2.1

Figura 4.10 - Representação gráfica da variabilidade associada às FRF da placa (casos 1.1 e 2.1, respetivamente)

Na Figura 4.10 apresentam-se as FRFs obtidas para os casos de estudo 1.1 e 2.1. Nesta figura procura-se caracterizar a variabilidade das FRF que são obtidas para diferentes níveis  $\alpha$ . Assim, para  $\alpha = 1$  teremos a FRF resultante de uma simulação determinística, sendo que para os restantes níveis  $\alpha$  teremos FRF resultantes de simulação considerando incerteza ao nível dos parâmetros de

entrada do modelo. Como é possível observar, a incerteza nos ângulos de orientação das fibras parece não conduzir a uma elevada variabilidade, uma vez que os resultados para todos os níveis  $\alpha$  seguem, de forma muito próxima, o FRF obtido para  $\alpha = 1$ . No entanto verifica-se que, em ambos os casos de estudo, a amplitude da resposta aumenta nas regiões correspondentes aos picos de resposta determinísticos. A gama de frequências para as quais se verificam estes picos de resposta mantém-se, no entanto, aproximadamente constante. Relativamente à influência da relação  $a/h$ , a variabilidade dos FRF parece ser muito semelhante em ambos os casos, pelo que esta parâmetro não terá uma influência significativa.

### Laminado $[0\ 90]_s$

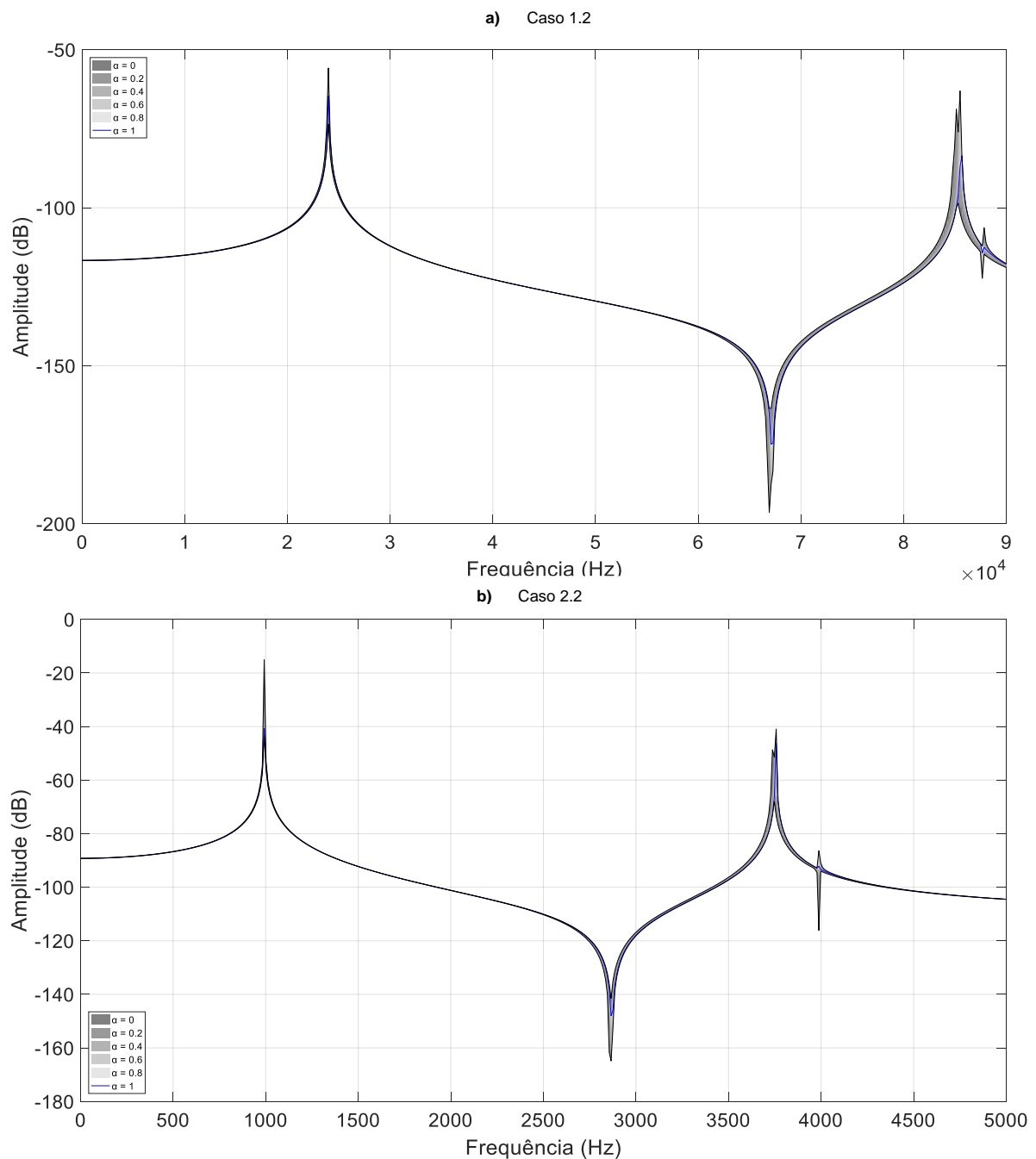


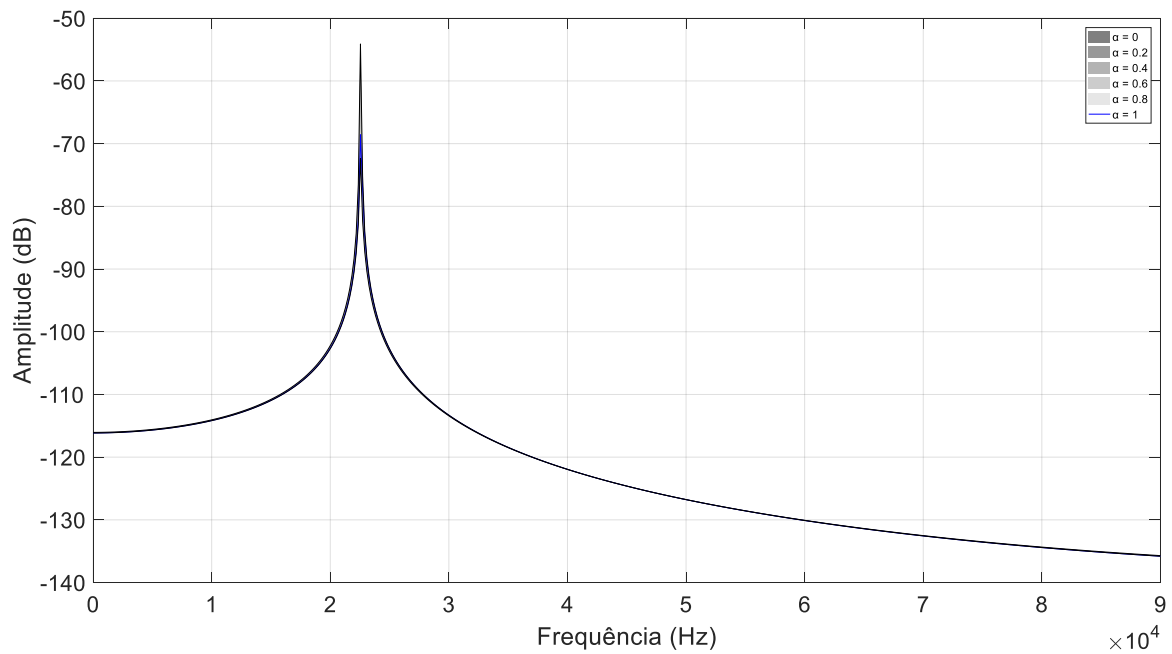
Figura 4.11 - Representação gráfica da variabilidade associada às FRF da placa (casos 1.2 e 2.2, respetivamente)



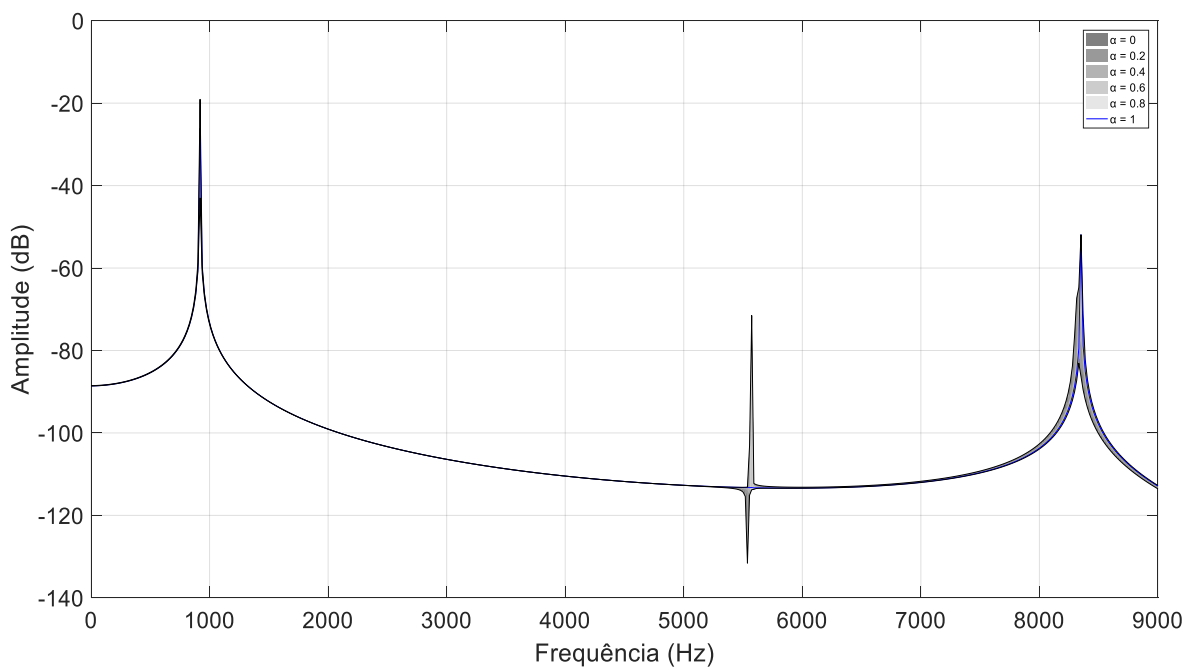
Na Figura 4.11 apresenta-se uma representação gráfica da variabilidade associada às FRF obtidos para os casos de estudo 1.2 e 2.2. Esta representação gráfica é obtida de modo semelhante ao que foi descrito para os dois casos anteriores. Mais uma vez, é possível constatar que a variabilidade resultante da incerteza nos ângulos de orientação das fibras não é muito significativa. De fato, para valores de frequência mais baixos, verifica-se para ambos os casos uma concordância das várias FRF obtidas com o FRF correspondente à simulação determinística, ou seja, para  $\alpha=1$ . Para frequências mais elevadas a variabilidade da resposta aumenta, registrando-se um alargar da gama de frequências para as quais uma dada amplitude ocorre, bem como um aumento dos valores dos picos de amplitude registrados.

### **Laminado [0 90]<sub>2</sub>**

Na Figura 4.12 apresenta-se uma representação gráfica da variabilidade associada às FRF obtidas para os casos de estudo 1.3 e 2.3. Uma análise desta figura revela, em primeiro lugar, que a variabilidade da resposta devido à incerteza nos ângulos das fibras é muito reduzida, para ambos os casos de estudo apresentados. De fato, verifica-se que para o caso 1.3 se obtém uma concordância quase total das FRF dos diferentes níveis  $\alpha$  relativamente à FRF que resulta da simulação determinística ( $\alpha = 1$ ). Esta concordância verifica-se também no caso 2.3 para um gama de frequências considerável, contudo é de notar que o aumento do valor das frequências resulta num ligeiro aumento da variabilidade da resposta. Assim, para frequências mais elevadas, ocorre um pequeno alargamento da banda de frequências para as quais poderão ocorrer os picos de amplitude. Verifica-se também o aparecimento de um pico de amplitude de resposta para alguns níveis  $\alpha$  que não se verifica no caso da simulação determinística. Relativamente à influência da relação  $a/h$  considerada, esta parece não ter um impacto significativo na variabilidade das FRF, uma vez que, tal como foi referido anteriormente, para uma gama considerável do espectro de frequência ocorre uma concordância das FRF, tanto para 1.3 como para 2.3.



a) Caso 1.3



b) Caso 2.3

Figura 4.12 - Representação gráfica da variabilidade associada às FRF da placa (casos 1.3 e 2.3, respetivamente)

### 4.3 Incerteza na Espessura das Lâminas

Na Tabela 4.3.1 é apresentado um resumo dos parâmetros do modelo utilizados na simulação de cada um dos casos de estudo considerados neste trabalho, para análise da resposta estática e dinâmica de uma placa de compósito laminado IM7/8552UD sujeita a incerteza na espessura das lâminas.

Tabela 4.3.1 - Casos de estudo considerando incerteza na espessura das lâminas.

Caso de Estudo	$a/h$	Sequência de Empilhamento	$h_{lamina}$ ( $\alpha = 1$ )	$\Delta h_{lamina}$ ( $\alpha = 0$ )
3.1	20	$[0]_4$	0.131 mm	$\pm 0.03h$
3.2		$[0/90]_s$		
3.3		$[0/90]_2$		
4.1	100	$[0]_4$	0.131 mm	$\pm 0.03h$
4.2		$[0/90]_s$		
4.3		$[0/90]_2$		

Nos casos de estudo 3.X e 4.X realiza-se simulação considerando que a espessura de todas as lâminas possui uma incerteza associada. Considerou-se que esta incerteza é representada por uma função de pertença *fuzzy* triangular simétrica, de valor médio (para  $\alpha = 1$ ) igual a 0.131mm (valor fornecido pelo fabricante), e apresentando um desvio máximo (para  $\alpha = 0$ ) de 3% do valor médio. Os restantes parâmetros de modelação (incluindo os ângulos das fibras de cada lâmina) são mantidos constantes, com valores iguais aos valores nominais. É de referir que nas diferentes simulações realizadas a espessura do laminado não se encontra fixa. Na Figura 4.13 apresenta-se o gráfico da função de pertença utilizada para a espessura de uma lâmina, nos casos de estudo 3.X e 4.X.

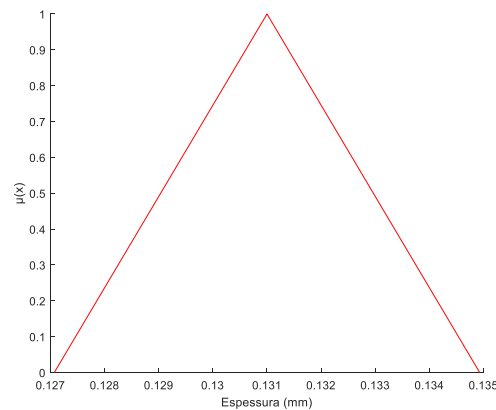


Figura 4.13 - Gráfico da função de pertença *fuzzy* para a espessura de uma lâmina.

### 4.3.1 Resultados Simulação Estática

#### Laminado $[0]_4$

Nos casos 3.1 e 4.1 todas as camadas possuem a mesma espessura nominal, pelo que a função de pertinência que representa a incerteza no valor da espessura de uma lâmina é comum a todas as camadas. Na Figura 4.14 apresentam-se os gráficos das funções de pertinência para a deformada máxima da placa, obtidos através da simulação realizada para os casos 3.1 e 4.1. Adicionalmente, na Tabela 4.3.2 encontram-se representados os valores dos intervalos obtidos, para cada  $\alpha$ .

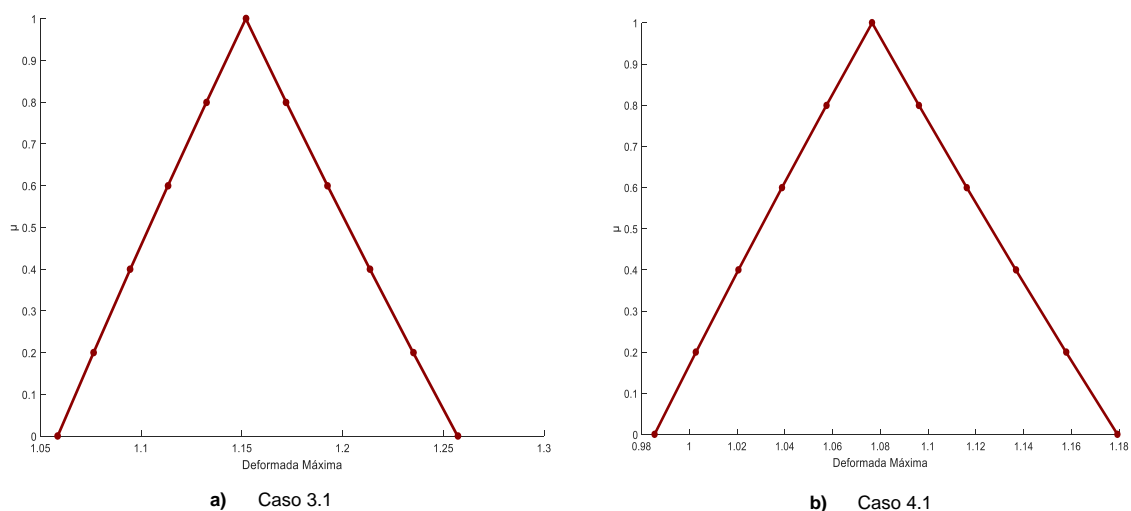


Figura 4.14 - Gráficos das funções de pertinência fuzzy da deformada máxima adimensional (Casos 3.1 e 4.1, respetivamente).

Tabela 4.3.2 - Resultados da simulação estática para os casos de estudo 3.1 e 4.1.

$\alpha$	Caso 3.1				Caso 4.1			
	Deformada Máxima Adimensional	Amplitude Intervalo (%)	Desvio Normalizado		Deformada Máxima Adimensional	Amplitude Intervalo (%)	Desvio Normalizado	
			$\underline{u}$	$\overline{u}$			$\underline{u}$	$\overline{u}$
0	[1,0586; 1,2571]	17,236	0,000	1,000	[0,9854; 1,1794]	18,019	0,000	1,000
0.2	[1,0764; 1,2350]	13,774	0,090	0,889	[1,0028; 1,1578]	14,399	0,090	0,889
0.4	[1,0946; 1,2135]	10,322	0,182	0,780	[1,0206; 1,1368]	10,791	0,181	0,780
0.6	[1,1133; 1,1925]	6,877	0,276	0,675	[1,0388; 1,1162]	7,189	0,275	0,674
0.8	[1,1324; 1,1720]	3,438	0,372	0,571	[1,0575; 1,0962]	3,593	0,372	0,571
1	1,1519				1,0766			

Analisando a Figura 4.14 verifica-se que, tanto para o caso 3.1 ( $a/h=20$ ) como para o caso 4.1 ( $a/h=100$ ), se obtêm funções de pertinência cujos gráficos apresentam uma forma triangular

aproximadamente simétrica em torno de um eixo vertical. De fato, o rácio  $a/h$  parece não ter influência no tipo de função de pertença obtida, uma vez que em ambos os casos os gráficos das funções são muito semelhantes. Para além disso, parece existir uma relação linear entre as pertenças utilizadas para os parâmetros de entrada e a pertença da deformada, uma vez que, tal como foi referido, foram utilizadas funções de pertença triangulares simétricas para os valores da espessura de cada lâmina. No entanto, é de referir que a correspondência entre as funções de pertença dos parâmetros de entrada e da resposta resulta exclusivamente da variabilidade da resposta do modelo, não tendo sido gerada de forma intencional.

Relativamente à amplitude dos intervalos, a utilização de um maior rácio  $a/h$  conduz a valores ligeiramente superiores. No entanto, as diferenças são muito pouco significativas, sendo que a análise da evolução destas diferenças para níveis  $\alpha$  crescentes mostra que estas diminuem, tornando-se praticamente nulas. Os valores de desvio normalizado obtidos para os casos 3.1 e 4.1 são praticamente iguais, o que demonstra a semelhança das duas funções de pertença de resposta, que se aproxima de uma forma simétrica. Verifica-se também um ligeiro deslocamento para valores de deformada mais reduzidos, pois os limites superiores dos intervalos encontram-se a menor distância do valor nominal. Este fato não é evidente se analisarmos apenas os gráficos das funções.

### Laminado $[0\ 90]_s$

De forma semelhante aos dois casos anteriores, as quatro lâminas utilizadas na simulação dos casos 3.2 e 4.2 possuem o mesmo valor de espessura nominal, pelo que a função de pertença

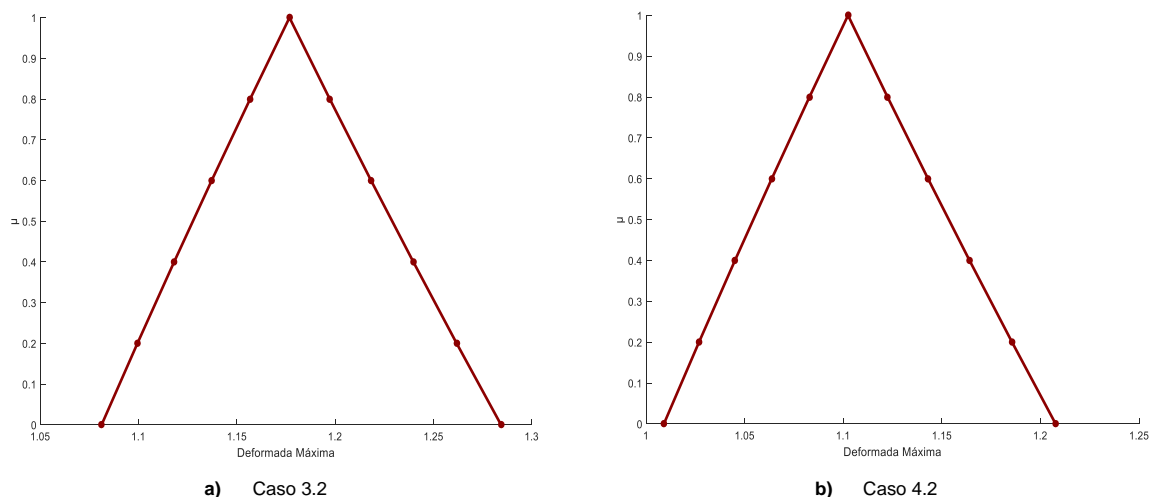


Figura 4.15 - Gráficos das funções de pertença *fuzzy* da deformada máxima adimensional (Casos 3.2 e 4.2, respetivamente).

utilizada na modelação da espessura é comum a todas elas. Na Figura 4.15 apresentam-se os gráficos das funções de pertença para a deformada máxima da placa, que são resultado da

simulação realizada para os casos 3.2 e 4.2. Na Tabela 4.3.3 encontram-se representados os valores dos intervalos obtidos para cada nível  $\alpha$ .

*Tabela 4.3.3 - Resultados da simulação estática para os casos de estudo 3.2 e 4.2.*

$\alpha$	Caso 3.2				Caso 4.2			
	Deformada Máxima Adimensional	Amplitude Intervalo (%)	Desvio Normalizado		Deformada Máxima Adimensional	Amplitude Intervalo (%)	Desvio Normalizado	
			$\underline{u}$	$\overline{u}$			$\underline{u}$	$\overline{u}$
0	[1,0812; 1,2844]	17,266	0,000	1,000	[1,0091; 1,2077]	18,020	0,000	1,000
0.2	[1,0994; 1,2618]	13,798	0,090	0,889	[1,0269; 1,1856]	14,400	0,090	0,889
0.4	[1,1181; 1,2398]	10,340	0,182	0,780	[1,0451; 1,1641]	10,791	0,181	0,780
0.6	[1,1372; 1,2183]	6,889	0,276	0,675	[1,0638; 1,1430]	7,190	0,275	0,674
0.8	[1,1568; 1,1973]	3,443	0,372	0,571	[1,0829; 1,1225]	3,594	0,372	0,571
1	1,1768				1,1024			

Através de uma análise comparativa da Figura 4.15 constata-se que os gráficos das funções de pertença da deformada máxima para os casos 3.2 e 4.2 são muito semelhantes, apresentando ambos uma forma triangular que é aproximadamente simétrica em torno de um eixo vertical. Assim, verifica-se que quando se considera unicamente incerteza ao nível da espessura das lâminas, a relação  $a/h$  parece não influencia a forma das funções de pertença obtidas, pois esta forma é muito semelhante em ambos os casos. Este fato é corroborado pelo fato dos valores do desvio normalizado serem praticamente iguais. Tal como nos casos 3.1 e 4.1, é possível observar uma relação aproximadamente linear entre a forma da função de pertença escolhida para descrever a incerteza nos parâmetros de entrada e a função de pertença da resposta que resulta da simulação.

Relativamente à amplitude de intervalos, a comparação dos dois casos revela que tanto os valores como a sua evolução ao longo dos diferentes níveis de  $\alpha$  é muito semelhante. É ainda de referir que apesar da análise gráfica sugerir que as funções de pertença apresentam simetria, os valores do desvio normalizado demonstram que isto é falso. É possível constatar este fato ao levar em conta que os valores do desvio normalizado para o limite inferior são ligeiramente menores que os do limite superior, apesar desta diferença diminuir ao longo dos vários  $\alpha$  – *cut*.

## Laminado $[0\ 90]_2$

Nos casos 3.3 e 4.3 aplica-se mais uma vez a função de pertinência representada na Figura 4.13 para modelar a incerteza ao nível da espessura de cada uma das quatro lâminas. Na Figura 4.16 estão representados os gráficos das funções de pertinência para a deformada máxima da placa, obtidos para os casos 3.2 e 4.2. Na Tabela 4.3.4 encontram-se representados os valores dos intervalos obtidos para cada nível  $\alpha$ .

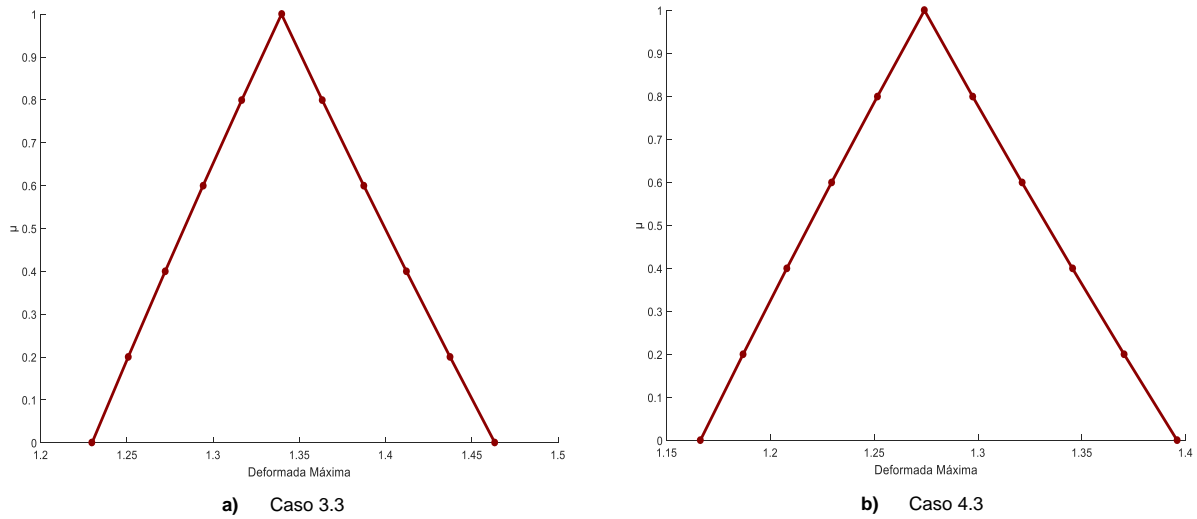


Figura 4.16 - Gráficos das funções de pertinência *fuzzy* da deformada máxima adimensional (Casos 3.3 e 4.3, respetivamente).

Tabela 4.3.4 - Resultados da simulação estática para os casos de estudo 3.3 e 4.3.

$\alpha$	Caso 3.3				Caso 4.3			
	Deformada Máxima Adimensional	Amplitude Intervalo (%)	Desvio Normalizado		Deformada Máxima Adimensional	Amplitude Intervalo (%)	Desvio Normalizado	
			$\underline{u}$	$\overline{u}$			$\underline{u}$	$\overline{u}$
0	[1,2297; 1,4634]	17,139	0,000	1,000	[1,1662; 1,3960]	18,028	0,000	1,000
0.2	[1,2507; 1,4374]	13,697	0,090	0,889	[1,1868; 1,3704]	14,407	0,090	0,889
0.4	[1,2722; 1,4121]	10,264	0,182	0,780	[1,2079; 1,3455]	10,796	0,181	0,780
0.6	[1,2941; 1,3873]	6,839	0,276	0,675	[1,2295; 1,3211]	7,193	0,275	0,674
0.8	[1,3166; 1,3632]	3,418	0,372	0,571	[1,2516; 1,2974]	3,595	0,372	0,571
1	1,3632				1,2742			

De forma semelhante aos casos anteriormente analisados, as funções de pertinência obtidas para a deformada da placa são do tipo triangular, sendo também aproximadamente simétricas em torno de um eixo vertical que passe pelo ponto correspondente a  $\alpha = 1$ . Realizando uma análise comparativa dos gráficos para os casos 3.3 e 4.3, verifica-se que o rácio  $a/h$ , tal como acontece

com os restantes casos, não influencia a forma da função de pertença. Isto é mais uma vez confirmado pelos valores do desvio normalizado, muito semelhantes em 3.3 e 4.3. A relação linear entre a forma da função de pertença dos parâmetros de entrada e a forma da função de pertença da resposta mantém-se. Os valores da amplitude do intervalo são ligeiramente superiores para o caso 4.3, no entanto esta diferença é pouco significativa, diminuindo ao longo dos vários níveis de  $\alpha$ .

### ***Influência da Sequência de Empilhamento***

Realizando uma análise comparativa dos gráficos das funções de pertença obtidos para os casos 3.X e 4.X, verifica-se que o tipo de função obtido se mantém constante, independentemente da sequência de empilhamento considerada. Uma vez que em todas as simulações se obtiveram funções de pertença do tipo triangular, muito semelhantes entre si, a sequência de empilhamento parece, nestes casos, não influenciar significativamente a forma da função de pertença da deformada máxima da placa. Neste aspeto, o fato de se verificar uma relação próxima de linear entre a forma da pertença usada nos parâmetros de entrada e a forma da pertença da resposta, parece prevalecer na definição do tipo de pertença resultante da simulação. De fato, os valores do desvio normalizado confirmam a pouca influência da sequência de empilhamento na resposta, uma vez que todos os casos apresentam resultados praticamente iguais. Do ponto de vista da amplitude dos intervalos, para um mesmo rácio  $a/h$ , verifica-se também uniformidade nos resultados obtidos, mantendo-se os valores praticamente iguais ao longo dos diferentes casos. Existem, no entanto, diferenças ao nível dos valores obtidos no que respeita à deformada máxima da placa. As sequências de empilhamento simétricas parecem conduzir a menores valores de deformada comparativamente à sequência não simétrica.

Desta forma, quando se considera incerteza exclusivamente ao nível da espessura das lâminas, a sequência de empilhamento parece não ter uma influência significativa na variabilidade da resposta da placa. O rácio  $a/h$ , como se referiu anteriormente, também não se apresenta como um parâmetro de relevância. Por outro lado, a forma da função de pertença considerada para os parâmetros de entrada parece influenciar a variabilidade da resposta obtida.



### 4.3.2 Resultados Simulação Dinâmica – Frequência Natural Fundamental

#### Laminado $[0]_4$

Na Figura 4.17 apresentam-se gráficos das funções de pertinência da frequência natural fundamental (adimensionalizada) da placa, para os casos de estudo 3.1 e 4.1. A Tabela 4.3.5 apresenta os valores dos intervalos obtidos para cada um dos  $\alpha$  – *cut* considerados.

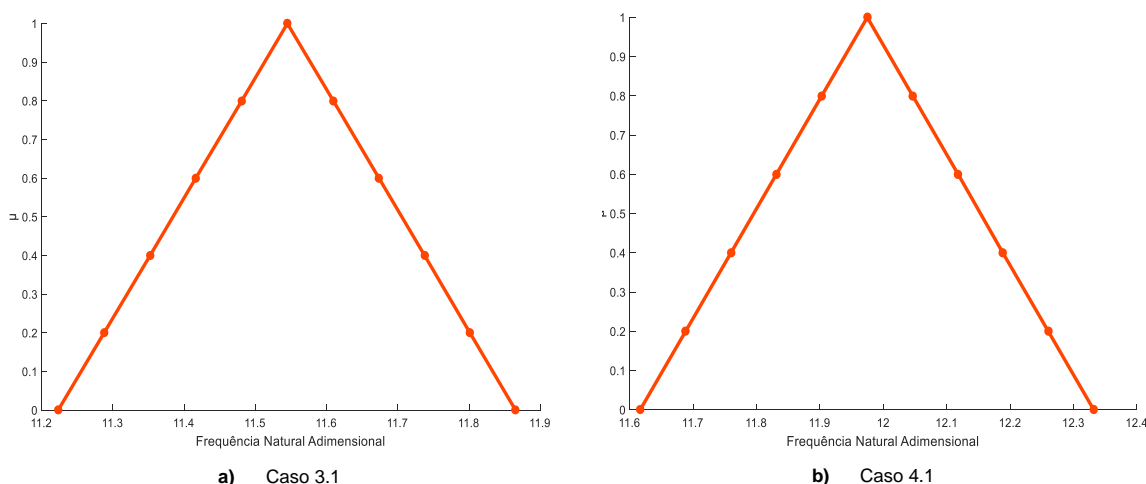


Figura 4.17 - Gráficos das funções de pertinência *fuzzy* da frequência natural fundamental adimensional (Casos 3.1 e 4.1, respetivamente)

Tabela 4.3.5 - Resultados da simulação dinâmica para os casos de estudo 3.1 e 4.1.

$\alpha$	Caso 3.1				Caso 4.1			
	Frequência Natural Fundamental Adimensional	Amplitude Intervalo (%)	Desvio Normalizado		Frequência Natural Fundamental Adimensional	Amplitude Intervalo (%)	Desvio Normalizado	
			$\underline{u}$	$\overline{u}$			$\underline{u}$	$\overline{u}$
<b>0</b>	[11,2231; 11,8653]	5,562	0,000	1,000	[11,6163; 12,3322]	5,978	0,000	1,000
<b>0.2</b>	[11,2877; 11,8012]	4,448	0,101	0,900	[11,6880; 12,2604]	4,780	0,100	0,900
<b>0.4</b>	[11,3522; 11,7376]	3,338	0,201	0,801	[11,7596; 12,1887]	3,584	0,200	0,800
<b>0.6</b>	[11,4163; 11,6735]	2,228	0,301	0,701	[11,8312; 12,1182]	2,397	0,300	0,701
<b>0.8</b>	[11,4808; 11,6095]	1,114	0,401	0,602	[11,9028; 12,0465]	1,200	0,400	0,601
<b>1</b>	11,5449		0,501		11,9748		0,501	

Com base nos resultados apresentados é possível concluir que, independentemente do rácio  $a/h$  considerado, a frequência natural (fundamental) da placa é descrita por funções de pertinência triangulares, simétricas relativamente a um eixo vertical que passe pelo ponto de  $\alpha = 1$ . Assim, a forma da função de pertinência resultante da simulação não é influenciada pela relação  $a/h$

considerada para a placa. Consta-se também que a variabilidade da frequência natural é marginalmente superior no caso 4.1, sendo que ocorre uma diminuição das diferenças existentes ao longo de níveis  $\alpha$  crescentes.

### Laminado $[0\ 90]_s$

Na Figura 4.18 apresentam-se os gráficos das funções de pertença para a da frequência natural fundamental (adimensionalizada) da placa, que são resultado da simulação realizada para os casos 3.2 e 4.2. Na Tabela 4.3.6 encontram-se representados os valores dos intervalos obtidos para cada nível  $\alpha$ .

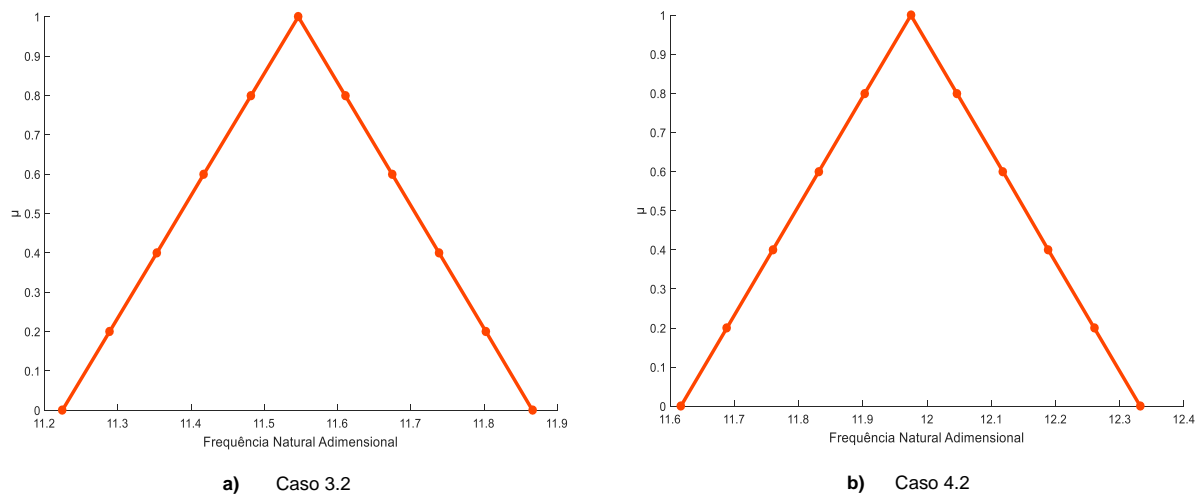


Figura 4.18 - Gráficos das funções de pertença *fuzzy* da frequência natural fundamental adimensional (Casos 3.2 e 4.2, respetivamente)

Tabela 4.3.6 - Resultados da simulação dinâmica para os casos de estudo 3.2 e 4.2.

$\alpha$	Caso 3.2				Caso 4.2			
	Frequência Natural Fundamental Adimensional	Amplitude Intervalo (%)	Desvio Normalizado		Frequência Natural Fundamental Adimensional	Amplitude Intervalo (%)	Desvio Normalizado	
			$\underline{u}$	$\overline{u}$			$\underline{u}$	$\overline{u}$
0	[11,2241; 11,8662]	5,561	0,000	1,000	[11,6163; 12,3322]	5,978	0,000	1,000
0.2	[11,2886; 11,8026]	4,452	0,101	0,901	[11,6880; 12,2604]	4,780	0,100	0,900
0.4	[11,3532; 11,7386]	3,338	0,201	0,801	[11,7596; 12,1887]	3,584	0,200	0,800
0.6	[11,4173; 11,6745]	2,228	0,301	0,701	[11,8312; 12,1182]	2,397	0,300	0,701
0.8	[11,4818; 11,6104]	1,114	0,401	0,602	[11,9028; 12,0465]	1,200	0,400	0,601
1	11,5464		0,502		11,9748		0,501	

Para o caso do laminado  $[0\ 90]_5$  verifica-se, tal como no caso anterior, a existência de linearidade entre o tipo de pertença *fuzzy* escolhido para os parâmetros de entrada e o tipo de pertença resultante da simulação. Assim, as funções obtidas são do tipo triangular, apresentado simetria, como é possível verificar através dos valores de desvio normalizado. Desta forma, é possível constatar que o rácio  $a/h$  não possui uma influência significativa quando se considera uma sequência de empilhamento de  $[0\ 90]_5$ , conduzindo apenas a um ligeiro aumento da variabilidade da resposta.

### Laminado $[0\ 90]_2$

Na Figura 4.19 apresentam-se os gráficos das funções de pertença da frequência natural fundamental (adimensionalizada) da placa, que resultaram da simulação para os casos 3.3 e 4.3. A Tabela 4.3.7 apresenta os valores dos intervalos obtidos.

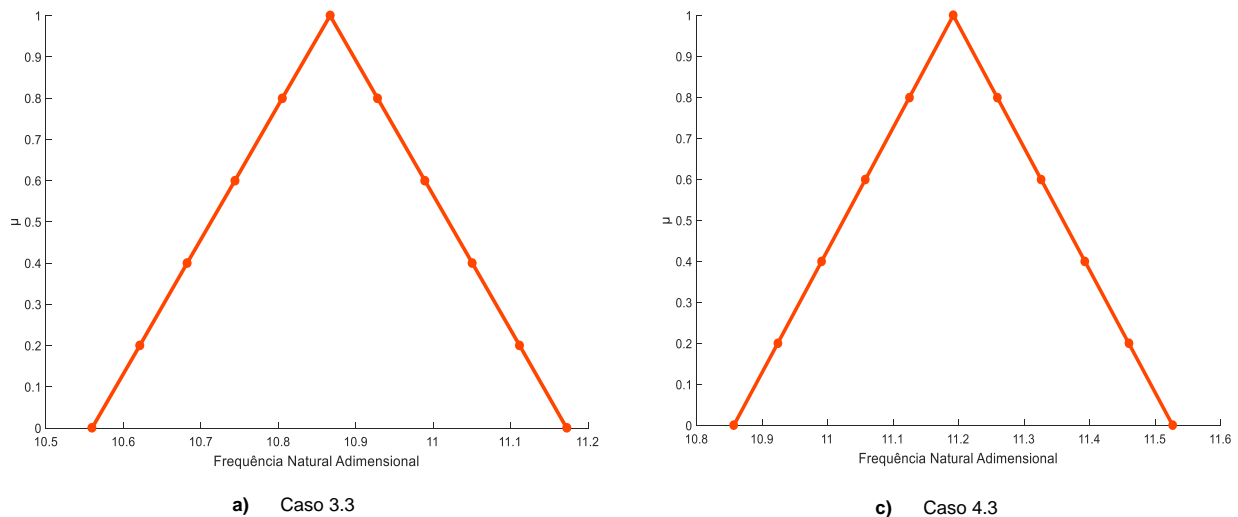


Figura 4.19 - Gráficos das funções de pertença *fuzzy* da frequência natural fundamental adimensional (Casos 3.3 e 4.3, respetivamente)

Tal como em todos os casos anteriormente analisados, para a sequência de empilhamento de  $[0\ 90]_2$  obtêm-se funções de pertença triangulares simétricas, verificando-se mais uma vez a existência de uma relação linear entre as funções utilizadas na descrição dos parâmetros de entrada e as funções obtidas a partir da simulação. A relação  $a/h$  não tem assim efeito na forma da função de pertença obtida, conduzindo apenas a um ligeiro aumento da variabilidade da frequência natural fundamental, especialmente para níveis  $\alpha$  mais baixos.

Tabela 4.3.7 - Resultados da simulação dinâmica para os casos de estudo 3.3 e 4.3.

$\alpha$	Caso 3.3				Caso 4.3			
	Frequência Natural Fundamental Adimensional	Amplitude Intervalo (%)	Desvio Normalizado		Frequência Natural Fundamental Adimensional	Amplitude Intervalo (%)	Desvio Normalizado	
			$\underline{u}$	$\overline{u}$			$\underline{u}$	$\overline{u}$
0	[10,5595; 11,1725]	5,641	0,000	1,000	[10,8569; 11,5267]	5,985	0,000	1,000
0.2	[10,6212; 11,1117]	4,514	0,101	0,901	[10,9239; 11,4597]	4,787	0,100	0,900
0.4	[10,6824; 11,0505]	3,388	0,201	0,801	[10,9909; 11,3928]	3,591	0,200	0,800
0.6	[10,7441; 10,9893]	2,257	0,301	0,701	[11,0578; 11,3258]	2,395	0,300	0,700
0.8	[10,8053; 10,9281]	1,131	0,401	0,601	[11,1249; 11,2589]	1,197	0,400	0,600
1	10,8669		0,502		11,1918		0,500	

### *Influência da sequência de empilhamento*

Uma análise comparativa dos resultados obtidos para as três sequências de empilhamento consideradas revela que este parâmetro parece não ter influência na forma da função de pertinência *fuzzy* da frequência natural fundamental, resultante da simulação. De fato, para todos os casos simulados, independentemente do empilhamento e da relação  $a/h$  considerada, obtiveram-se funções de pertinência triangulares, apresentando simetria em torno de um eixo vertical passando pelo ponto correspondente a  $\alpha = 1$ . Todas estas funções são idênticas entre si, como é possível verificar através da análise dos valores obtidos para o desvio normalizado. Por outro lado, parece existir uma relação quase linear entre as funções de pertinência escolhidas para descrever a incerteza nos parâmetros de modelação e as funções de pertinência obtidas a partir da simulação. Relativamente à variabilidade da resposta, expressa através da amplitude dos intervalos, os valores obtidos são muito semelhantes para as diferentes sequências de empilhamento, quando se considera uma relação  $a/h$  constante. No que diz respeito aos valores da frequência natural (fundamental) obtidos, as sequências de empilhamento simétricas apresentam valores muito próximos para  $a/h=20$  e valores exatamente iguais para  $a/h=100$ . Isto contrasta com os resultados obtidos para a sequência de empilhamento não-simétrica, que apresenta frequências fundamentais consideravelmente mais baixas.

### 4.3.3 Resultados Simulação Dinâmica - FRFs

#### Laminado $[0]_4$

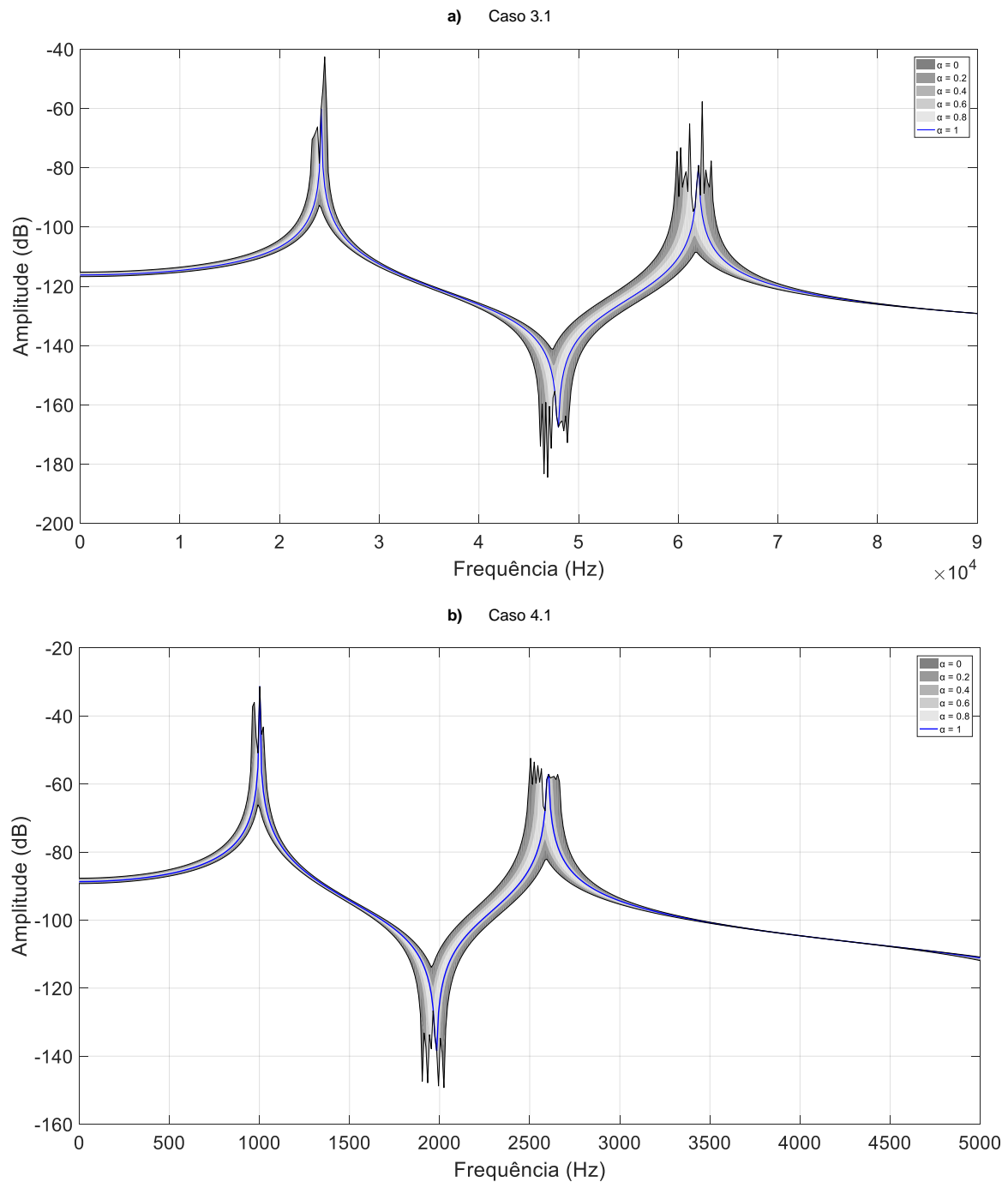


Figura 4.20 - Representação gráfica da variabilidade associada às FRF da placa (casos 3.1 e 4.1, respetivamente).

Na Figura 4.20 procura-se caracterizar a variabilidade associada às FRF obtidas para os casos de estudo 3.1 e 4.1. Assim, e de modo semelhante à análise que foi realizada para os casos de incerteza na orientação das fibras, são representados as FRF resultantes da simulação para diferentes níveis  $\alpha$ . Desta forma, teremos uma FRF correspondente a uma simulação determinística ( $\alpha=1$ ) e as restantes resultantes de simulações nas quais se considera incerteza ao

nível dos parâmetros de modelação. Como é possível constatar através da análise da figura, a incerteza na espessura das lâminas conduz, em ambos os casos, a variabilidade das FRF obtidas. Esta variabilidade é claramente mais significativa para frequências mais elevadas, bem como na região correspondente às frequências naturais da placa. Tal como seria de esperar, verifica-se que níveis  $\alpha$  inferiores conduzem a uma maior variabilidade das FRF obtidas, comparativamente com os níveis  $\alpha$  superiores. Do ponto de vista dos efeitos da incerteza, verifica-se que as frequências para as quais ocorrem os picos de incerteza podem variar significativamente, apresentando um claro desvio relativamente aos valores determinísticos. As amplitudes verificadas registam também um aumento para os casos de alguns níveis  $\alpha$ . Relativamente à influência da relação  $a/h$  considerada os resultados, parece não existir um impacto significativo, uma vez que a variabilidade registada em ambos os casos é bastante semelhante.

### Laminado $[0\ 90]_s$

Nas *Figura 4.21* e *Figura 4.22* representa-se a variabilidade associada às FRF obtidas para os casos de estudo 3.2 e 4.2. A análise desta figura permite perceber que a incerteza na espessura das lâminas conduz a alguma variabilidade das FRF resultantes da simulação. Esta variabilidade é tanto mais significativa quanto maior for o valor da frequência considerado. Para além disso, as regiões das frequências naturais da placa registam também uma maior dispersão dos resultados. No entanto, para valores de frequência reduzidos, verifica-se uma maior concordância das FRF associadas aos diferentes níveis  $\alpha$ , pelo que a variabilidade é claramente mais reduzida. Uma análise da variabilidade revela que esta se encontra associada a um alargamento da gama de frequências para as quais ocorrem os picos de amplitude. Adicionalmente, regista-se para alguns níveis  $\alpha$  um aumento significativo da amplitude dos picos de resposta.

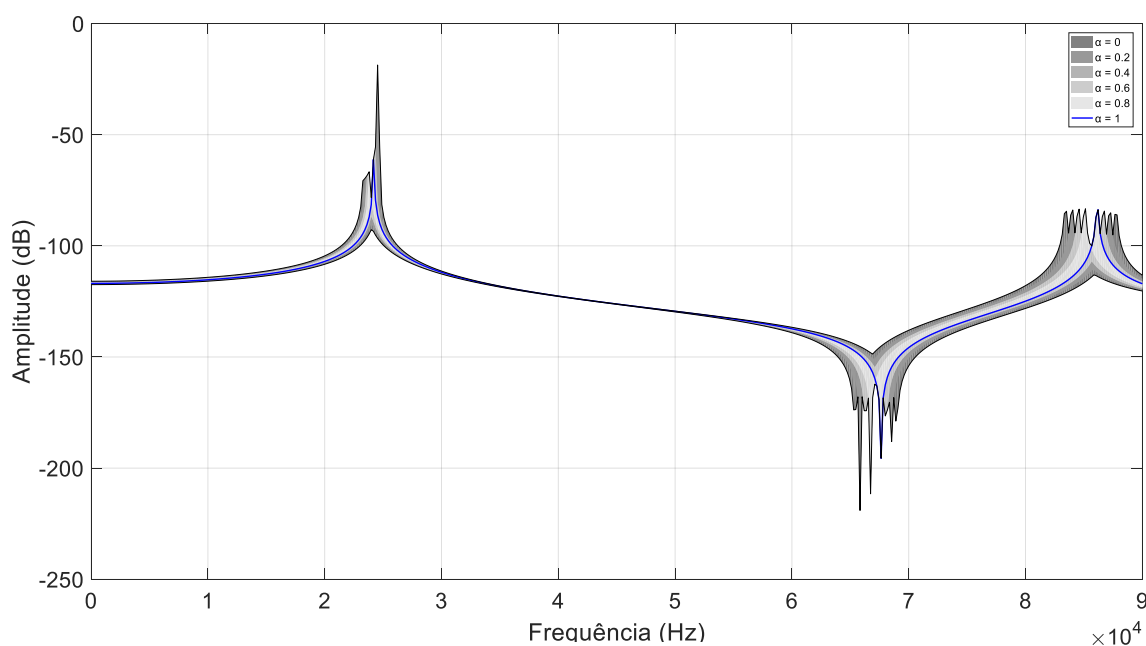


Figura 4.21 - Representação gráfica da variabilidade associada às FRF da placa (caso 3.2).

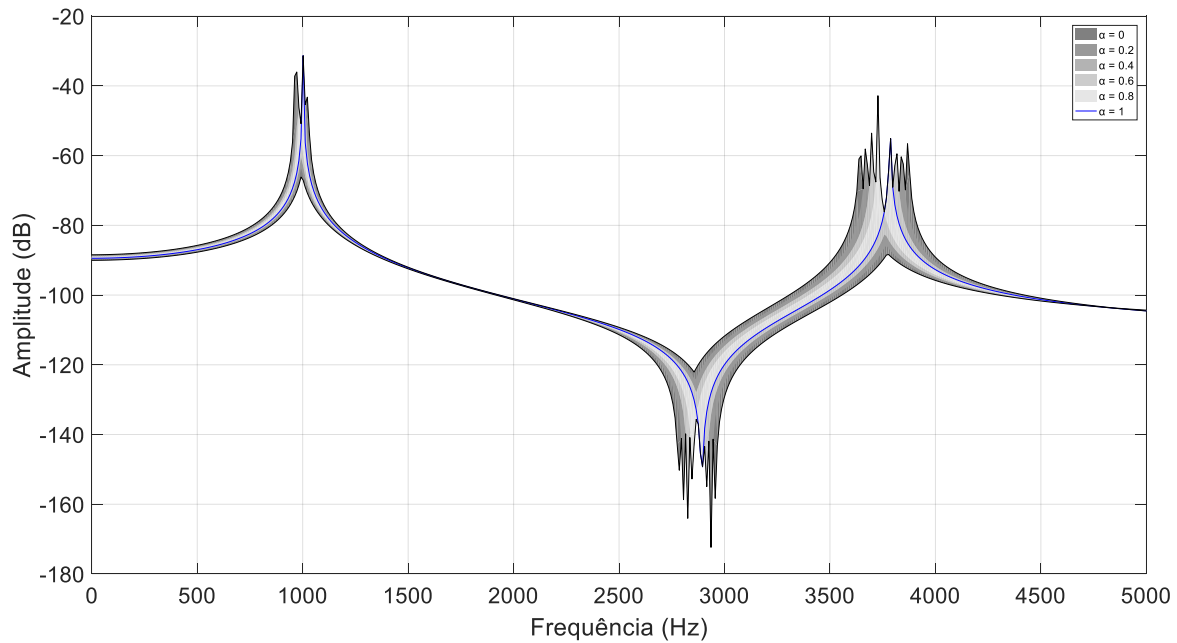


Figura 4.22 - Representação gráfica da variabilidade associada às FRF da placa (caso 4.2).

### Laminado $[0\ 90]_2$

Na Figura 4.23 representam-se graficamente as FRF obtidas para diferentes níveis  $\alpha$ , resultantes da simulação para os casos de estudo 3.3 e 4.3. Como é possível constatar através da análise da figura, no caso do laminado de empilhamento  $[0\ 90]_2$  a variabilidade das FRF é reduzida para valores de frequência baixos. Assim, regista-se em ambos os casos uma elevada concordância das FRF obtidas para os vários níveis  $\alpha$  relativamente ao FRF correspondente à simulação determinística. Desta forma, tanto os valores da frequência para os quais ocorrem os picos de amplitude como os valores destas amplitudes são bastante próximos. No entanto verifica-se que, para o caso 4.3, ocorre um claro aumento da variabilidade da resposta para os valores de frequência mais elevados. Nesta situação é possível observar um alargamento significativo da gama de frequências para as quais podem ocorrer picos de amplitude, bem como um aumento dos valores destas amplitudes, comparativamente com a FRF determinística. Mais uma vez é possível verificar que níveis  $\alpha$  inferiores conduzem a uma maior variabilidade da resposta, comparativamente com níveis  $\alpha$  superiores. Do ponto de vista da influência da relação  $a/h$  na variabilidade dos resultados, o caso 4.3 parece possuir maior variabilidade associada. No entanto, este facto deve-se ao aparecimento de um pico de amplitude de resposta a uma frequência mais elevada, que não se regista em 3.3. Assim, não é possível concluir definitivamente que o caso de estudo 4.3 possui uma maior variabilidade associada.

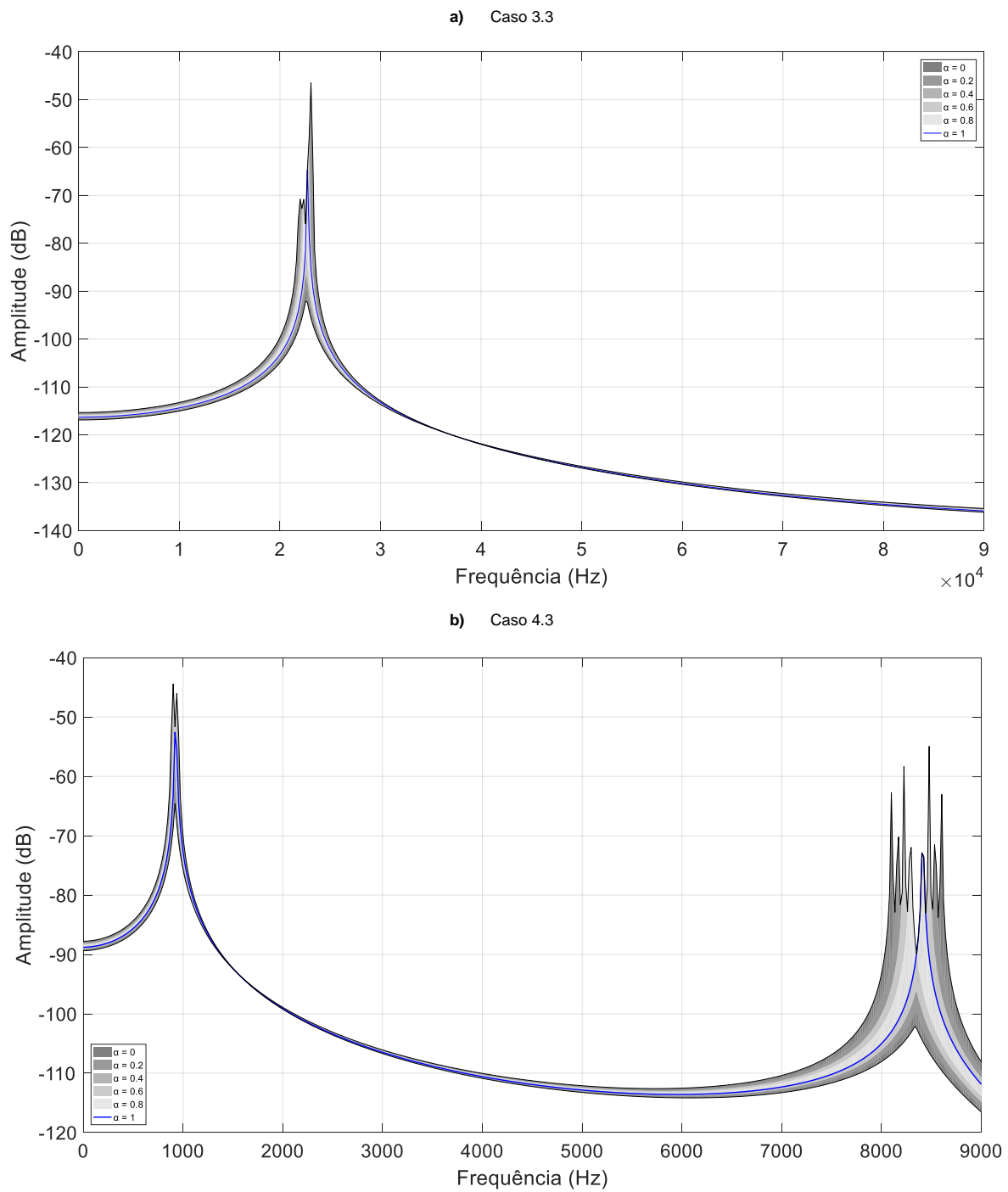


Figura 4.23 - Representação gráfica da variabilidade associada às FRF da placa (casos 3.3 e 4.3, respetivamente).



## 4.4 Incerteza nas Propriedades Mecânicas da Lâmina

Na Tabela 4.4.1 são apresentados os parâmetros do modelo utilizados na simulação de cada um dos casos de estudo considerados neste trabalho, para análise da resposta estática e dinâmica de uma placa de compósito laminado IM7/8552UD sujeita a incerteza nas propriedades mecânicas das suas lâminas.

Tabela 4.4.1 - Casos de estudo considerando incerteza nas propriedades mecânicas das lâminas.

Caso de Estudo	$a/h$	Sequência de Empilhamento	$E_{11}, E_{22}, G_{12}, G_{23}, \nu_{12}$ ( $\alpha = 1$ )	$\Delta E_{11}, \Delta E_{22}, \Delta G_{12}, \Delta G_{23}, \Delta \nu_{12}$ ( $\alpha = 0$ )
5.1	20	$[0]_4$	Valor Nominal	$\pm 10\%$ Valor Nominal
5.2		$[0/90]_s$		
5.3		$[0/90]_2$		
6.1	100	$[0]_4$	Valor Nominal	$\pm 10\%$ Valor Nominal
6.2		$[0/90]_s$		
6.3		$[0/90]_2$		

Para os casos de estudo 5.X e 6.X realizou-se simulação considerando incerteza ao nível das propriedades mecânicas das lâminas, nomeadamente ao nível do módulo de elasticidade longitudinal ( $E_{11}$ ), módulo de elasticidade transversal ( $E_{22}$ ), módulo de distorção no plano 1,2 ( $G_{12}$ ), módulo de elasticidade no plano 2,3 ( $G_{23}$ ) e coeficiente de Poisson no plano 1,2 ( $\nu_{12}$ ). Foi realizada simulação considerando incerteza em todas as propriedades simultaneamente e, adicionalmente, considerando incerteza ao nível de cada propriedade de forma individual. No caso desta análise individual, não se apresentam os resultados para  $G_{23}$ , uma vez que a variação da resposta é muito pouco significativa quando comparada com a que se obtém para as restantes propriedades. Considera-se que a incerteza em cada uma das propriedades mecânicas mencionadas anteriormente é descrita por uma função de pertença *fuzzy* triangular simétrica, de valor médio (para  $\alpha = 1$ ) correspondente ao valor nominal especificado pelo fabricante, e apresentando um desvio máximo (para  $\alpha = 0$ ) de 10% deste valor nominal. Na Figura 4.24 apresenta-se a representação gráfica das funções de pertença dos parâmetros para os quais se considera incerteza nos casos 5.X e 6.X. Os restantes parâmetros do modelo, como por exemplo a espessura das lâminas ou o valor dos ângulos de orientação das fibras, são mantidos constantes. Para além disso, considerou-se que o material IM7/8552UD é transversalmente isotrópico, ou seja, que as suas propriedades na direção do eixo  $y$  são iguais às que se verificam na direção do eixo  $z$ . Isto implica que:

$$E_{33} = E_{22} ; \nu_{13} = \nu_{12} ; G_{13} = G_{12}$$

Na implementação do modelo, considerou-se que esta igualdade se mantém quando existe incerteza na propriedade em causa. Por exemplo, ao simular incerteza em  $E_{22}$ , considera-se que o valor de  $E_{33}$  também varia, permanecendo igual ao valor que se assume para  $E_{22}$ . Na Figura 4.24 são apresentados os gráficos das funções de pertença *fuzzy* para as propriedades mecânicas da lâmina,

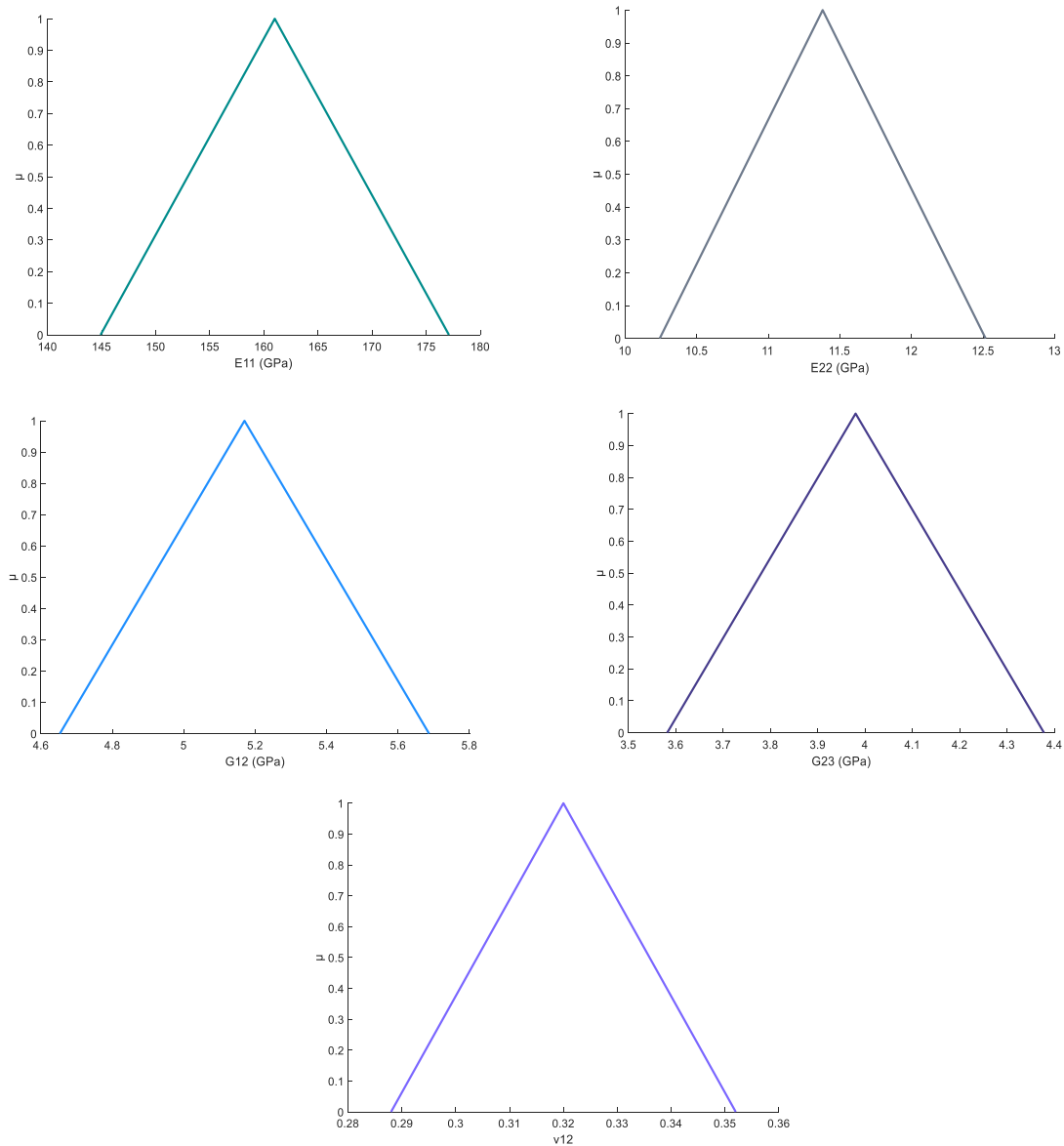


Figura 4.24 - Gráficos das Funções de pertença fuzzy para as propriedades mecânicas da lâmina.

Nos resultados que se apresentam de seguida foi simulada incerteza ao nível de diferentes propriedades de forma individual e em simultâneo, pelo que desta simulação resultam várias funções de pertença para cada um dos casos de estudo considerados. Optou-se assim por representar todas as funções para cada caso de estudo num único gráfico, por forma a permitir uma comparação direta entre resultados obtidos. Desta forma, no que diz respeito à métrica de desvio normalizado, os limites da escala utilizados como referência correspondem à simulação considerando incerteza em todas as propriedades mecânicas simultaneamente.

#### 4.4.1 Resultados Simulação Estática

##### Laminado $[0]_4$

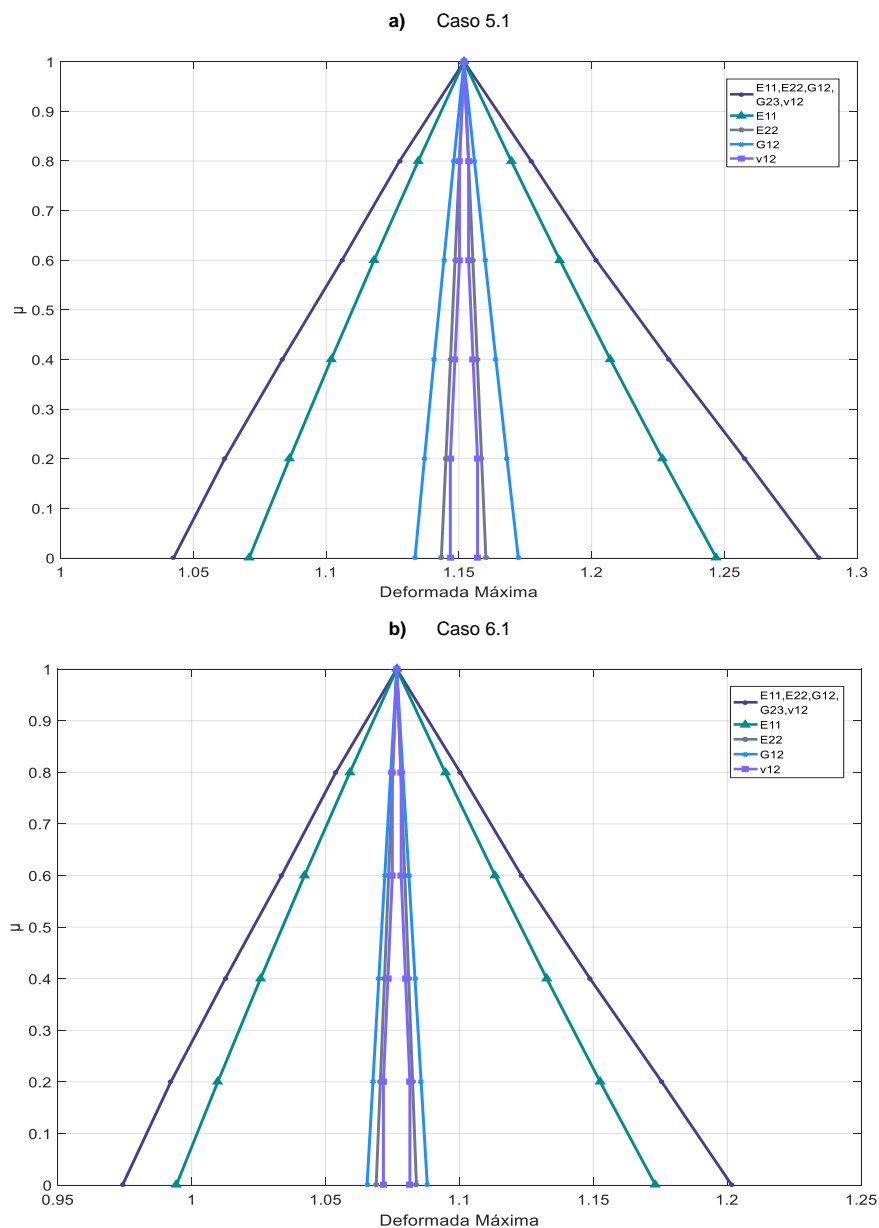


Figura 4.25 - Gráficos das funções de pertinência fuzzy da deformada máxima adimensional para diferentes propriedades mecânicas da lâmina sujeitas a incerteza (Casos 5.1 e 6.1, respetivamente).

Na Figura 4.25 apresentam-se os gráficos das funções de pertinência para a deformada máxima da placa (adimensional), para os casos 5.1 e 6.1. Adicionalmente, na Tabela 4.4.2 encontram-se representados os valores dos intervalos obtidos. Uma análise dos resultados da simulação estática obtidos revela, em primeiro lugar, a obtenção de funções de pertinência do tipo triangular para todas as situações analisadas. Para além disso, e de acordo com o que seria de esperar, verifica-se que em ambos os casos se obtém maior variabilidade da resposta quando se considera incerteza ao nível de todas as propriedades mecânicas simultaneamente. O módulo de elasticidade longitudinal da lâmina parece ser, em ambos os casos, a propriedade mecânica que provoca uma maior

variabilidade da deformada máxima. Assim,  $E_{11}$  possui uma influência na variabilidade da resposta bastante superior à dos restantes parâmetros (uma ordem de grandeza superior a  $E_{22}$  e  $v_{12}$ , por exemplo).

Tabela 4.4.2 - Resultados das simulações estáticas para os casos de estudo 5.1 e 6.1.

<i>Propriedades sujeitas a incerteza</i>	$E_{11}, E_{22}, G_{12}, G_{23}, v_{12}$	$E_{11}$	$E_{22}$	$G_{12}$	$v_{12}$
<b>Caso Estudo 5.1</b>					
$\alpha_0$	[1,0425; 1,2857]	[1,0710; 1,2470]	[1,1434; 1,1602]	[1,1335; 1,1724]	[1,1468; 1,1570]
$\alpha_{0.2}$	[1,0618; 1,2577]	[1,0862; 1,2267]	[1,1451; 1,1586]	[1,1370; 1,1681]	[1,1468; 1,1570]
$\alpha_{0.4}$	[1,0835; 1,2291]	[1,1019; 1,2071]	[1,1468; 1,1569]	[1,1407; 1,1639]	[1,1485; 1,1553]
$\alpha_{0.6}$	[1,1060; 1,2017]	[1,1181; 1,1881]	[1,1486; 1,1553]	[1,1444; 1,1599]	[1,1502; 1,1537]
$\alpha_{0.8}$	[1,1277; 1,1772]	[1,1347; 1,1697]	[1,1503; 1,1536]	[1,1481; 1,1559]	[1,1502; 1,1537]
$\alpha_1$	1,1519	1,1519	1,1519	1,1519	1,1519
<b>Amplitude Intervalo</b>					
$\alpha_0$	21,107	15,280	1,456	3,378	0,890
$\alpha_{0.2}$	17,003	12,196	1,166	2,698	0,890
$\alpha_{0.4}$	12,642	9,130	0,875	2,021	0,594
$\alpha_{0.6}$	8,312	6,079	0,584	1,346	0,297
$\alpha_{0.8}$	4,300	3,037	0,292	0,673	0,297
<b>Desvio Normalizado</b>					
	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$
$\alpha_0$	0,000      1,000	0,117      0,841	0,415      0,484	0,374      0,534	0,429      0,471
$\alpha_{0.2}$	0,079      0,885	0,180      0,758	0,422      0,477	0,389      0,517	0,429      0,471
$\alpha_{0.4}$	0,169      0,768	0,244      0,677	0,429      0,471	0,404      0,499	0,436      0,464
$\alpha_{0.6}$	0,261      0,655	0,311      0,599	0,436      0,464	0,419      0,483	0,443      0,457
$\alpha_{0.8}$	0,350      0,554	0,379      0,523	0,443      0,457	0,434      0,466	0,443      0,457
$\alpha_1$	0,450	0,450	0,450	0,450	0,450
<b>Caso Estudo 6.1</b>					
$\alpha_0$	[0,9742; 1,2016]	[0,9943; 1,1732]	[1,0689; 1,0839]	[1,0655; 1,0880]	[1,0716; 1,0815]
$\alpha_{0.2}$	[0,9922; 1,1755]	[1,0098; 1,1525]	[1,0705; 1,0825]	[1,0677; 1,0857]	[1,0716; 1,0815]
$\alpha_{0.4}$	[1,0125; 1,1488]	[1,0257; 1,1326]	[1,0720; 1,0810]	[1,0699; 1,0834]	[1,0733; 1,0799]
$\alpha_{0.6}$	[1,0336; 1,1232]	[1,0421; 1,1133]	[1,0735; 1,0796]	[1,0721; 1,0811]	[1,0749; 1,0782]
$\alpha_{0.8}$	[1,0539; 1,1002]	[1,0591; 1,0946]	[1,0751; 1,0781]	[1,0743; 1,0788]	[1,0749; 1,0782]
$\alpha_1$	1,0766	1,0766	1,0766	1,0766	1,0766
<b>Amplitude Intervalo</b>					
$\alpha_0$	21,129	16,617	1,396	2,090	0,918
$\alpha_{0.2}$	17,027	13,263	1,118	1,672	0,918
$\alpha_{0.4}$	12,658	9,930	0,839	1,254	0,612
$\alpha_{0.6}$	8,320	6,611	0,559	0,836	0,306
$\alpha_{0.8}$	4,308	3,303	0,280	0,418	0,306
<b>Desvio Normalizado</b>					
	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$
$\alpha_0$	0,000      1,000	0,088      0,875	0,416      0,482	0,401      0,500	0,428      0,472
$\alpha_{0.2}$	0,079      0,885	0,156      0,784	0,423      0,476	0,411      0,490	0,428      0,472
$\alpha_{0.4}$	0,169      0,768	0,226      0,696	0,430      0,470	0,421      0,480	0,436      0,465
$\alpha_{0.6}$	0,261      0,655	0,299      0,612	0,437      0,463	0,431      0,470	0,443      0,457
$\alpha_{0.8}$	0,350      0,554	0,373      0,530	0,444      0,457	0,440      0,460	0,443      0,457
$\alpha_1$	0,450	0,450	0,450	0,450	0,450

Do ponto de vista da comparação dos efeitos da relação  $a/h$  nos resultados, verifica-se que para a simulação com incerteza em todas as propriedades, em  $E_{22}$  e em  $v_{12}$  a variabilidade obtida é praticamente igual nos casos 5.1 e 6.1. No entanto, no caso de placas mais finas, verifica-se um aumento da influência de  $E_{11}$  na variabilidade da resposta, bem como uma diminuição da influência de  $G_{12}$  nesta mesma variabilidade. Assim, para o caso 6.1 constata-se que  $E_{22}$ ,  $G_{12}$  e  $v_{12}$  possuem um impacto semelhante na variabilidade da deformada máxima.

### Laminado $[0\ 90]_s$

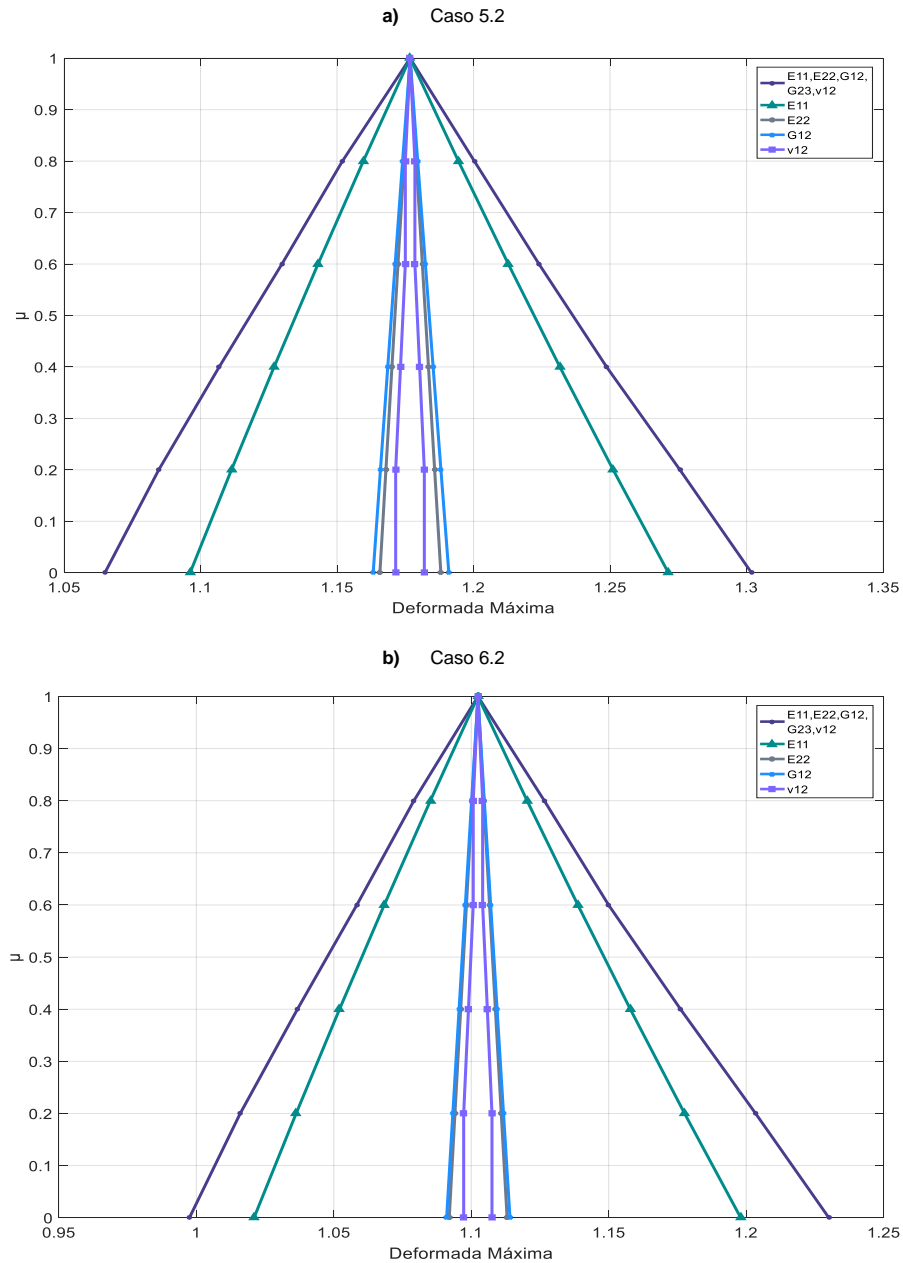


Figura 4.26 - Gráficos das funções de pertinência fuzzy da deformada máxima adimensional para diferentes propriedades mecânicas da lâmina sujeitas a incerteza (Casos 5.2 e 6.2, respetivamente).

Tabela 4.4.3 - Resultados das simulações estáticas para os casos de estudo 5.2 e 6.2.

Propriedades sujeitas a incerteza	$E_{11}, E_{22}, G_{12}, G_{23}, \nu_{12}$	$E_{11}$	$E_{22}$	$G_{12}$	$\nu_{12}$
Caso Estudo 5.2					
$\alpha_0$	[1,0650; 1,3018]	[1,0962; 1,2714]	[1,1657; 1,1880]	[1,1632; 1,1910]	[1,1715; 1,1820]
$\alpha_{0.2}$	[1,0847; 1,2756]	[1,1113; 1,2512]	[1,1679; 1,1858]	[1,1659; 1,1881]	[1,1715; 1,1820]
$\alpha_{0.4}$	[1,1068; 1,2488]	[1,1269; 1,2316]	[1,1701; 1,1835]	[1,1686; 1,1852]	[1,1733; 1,1803]
$\alpha_{0.6}$	[1,1298; 1,2240]	[1,1430; 1,2127]	[1,1723; 1,1813]	[1,1713; 1,1824]	[1,1750; 1,1785]
$\alpha_{0.8}$	[1,1520; 1,2003]	[1,1596; 1,1945]	[1,1745; 1,1790]	[1,1740; 1,1796]	[1,1750; 1,1785]
$\alpha_1$	1,1768	1,1768	1,1768	1,1768	1,1768
Amplitude Intervalo					
$\alpha_0$	20,126	14,886	1,896	2,354	0,892
$\alpha_{0.2}$	16,222	11,881	1,517	1,882	0,892
$\alpha_{0.4}$	12,059	8,895	1,138	1,411	0,595
$\alpha_{0.6}$	8,001	5,923	0,758	0,940	0,297
$\alpha_{0.8}$	4,106	2,959	0,379	0,470	0,297
Desvio Normalizado					
	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$
$\alpha_0$	0,000 1,000	0,132 0,871	0,425 0,520	0,415 0,532	0,450 0,494
$\alpha_{0.2}$	0,083 0,889	0,196 0,786	0,435 0,510	0,426 0,520	0,450 0,494
$\alpha_{0.4}$	0,177 0,776	0,262 0,704	0,444 0,500	0,437 0,508	0,457 0,487
$\alpha_{0.6}$	0,274 0,671	0,330 0,624	0,453 0,491	0,449 0,496	0,465 0,479
$\alpha_{0.8}$	0,367 0,571	0,400 0,547	0,463 0,481	0,460 0,484	0,465 0,479
$\alpha_1$	0,472	0,472	0,472	0,472	0,472
Caso Estudo 6.2					
$\alpha_0$	[0,9975; 1,2301]	[1,0210; 1,1980]	[1,0920; 1,1130]	[1,0911; 1,1141]	[1,0972; 1,1075]
$\alpha_{0.2}$	[1,0160; 1,2034]	[1,0363; 1,1776]	[1,0941; 1,1109]	[1,0933; 1,1117]	[1,0972; 1,1075]
$\alpha_{0.4}$	[1,0368; 1,1761]	[1,0521; 1,1579]	[1,0962; 1,1088]	[1,0956; 1,1094]	[1,0990; 1,1058]
$\alpha_{0.6}$	[1,0584; 1,1499]	[1,0683; 1,1388]	[1,0982; 1,1067]	[1,0979; 1,1071]	[1,1007; 1,1041]
$\alpha_{0.8}$	[1,0791; 1,1266]	[1,0851; 1,1203]	[1,1003; 1,1045]	[1,1001; 1,1047]	[1,1007; 1,1041]
$\alpha_1$	1,1024	1,1024	1,1024	1,1024	1,1024
Amplitude Intervalo					
$\alpha_0$	21,096	16,057	1,910	2,089	0,933
$\alpha_{0.2}$	17,004	12,816	1,528	1,671	0,933
$\alpha_{0.4}$	12,640	9,595	1,146	1,253	0,622
$\alpha_{0.6}$	8,306	6,389	0,764	0,835	0,311
$\alpha_{0.8}$	4,304	3,192	0,382	0,418	0,311
Desvio Normalizado					
	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$
$\alpha_0$	0,000 1,000	0,101 0,862	0,406 0,497	0,402 0,501	0,429 0,473
$\alpha_{0.2}$	0,079 0,885	0,167 0,774	0,415 0,488	0,412 0,491	0,429 0,473
$\alpha_{0.4}$	0,169 0,768	0,235 0,689	0,424 0,478	0,422 0,481	0,436 0,466
$\alpha_{0.6}$	0,262 0,655	0,305 0,607	0,433 0,469	0,431 0,471	0,444 0,459
$\alpha_{0.8}$	0,351 0,555	0,377 0,528	0,442 0,460	0,441 0,461	0,444 0,459
$\alpha_1$	0,451	0,451	0,451	0,451	0,451

Para os casos 5.2 e 6.2, correspondentes à análise do laminado de empilhamento  $[0\ 90]_S$ , verifica-se, que as funções de pertença obtidas para todas as situações são do tipo triangular (Figura 4.26). Na Tabela 4.4.3 são apresentados os valores dos intervalos obtidos.

Tal como nos casos anteriores, a simulação considerando incerteza em vários parâmetros simultaneamente, conduz à maior variabilidade total da deformada máxima. Para além disso,  $E_{11}$  é a propriedade mecânica que provoca uma maior variabilidade da resposta. As restantes propriedades conduzem a uma variabilidade da deformada semelhante, possuindo, no entanto, uma influência consideravelmente menos significativa. Relativamente à influência da relação  $a/h$  nos resultados obtidos, uma análise comparativa revela a existência de alguns efeitos. Assim, para o caso 6.2, verificam-se ligeiros aumentos na variabilidade resultante da simulação com todos os parâmetros sujeitos a incerteza, bem como um ligeiro aumento da variabilidade quando se considera incerteza em  $E_{11}$ , relativamente a 5.2. Em contrapartida,  $G_{12}$  conduz a menor variabilidade em 6.2. No entanto, estas alterações são pouco significativas, diminuindo também ao longo de níveis  $\alpha$  crescentes.

### Laminado $[0\ 90]_2$

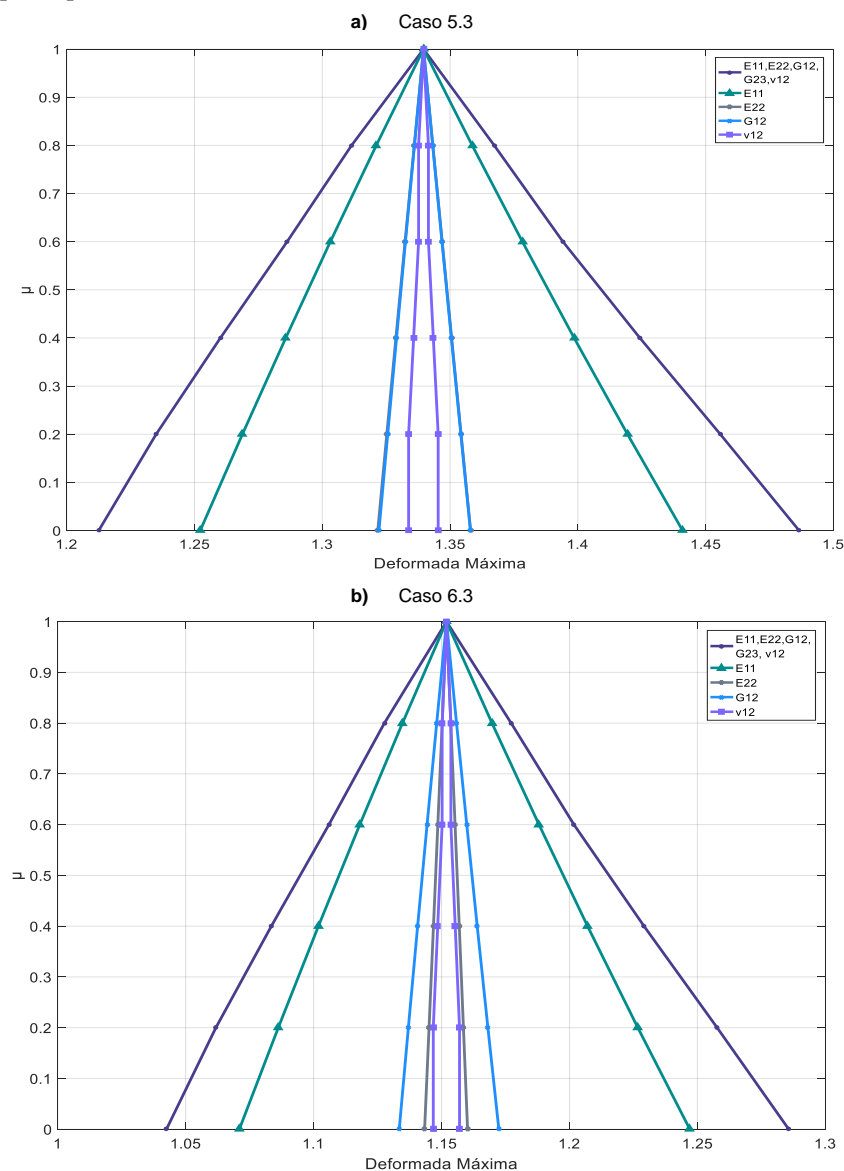


Figura 4.27 - Gráficos das funções de pertença *fuzzy* da deformada máxima adimensional para diferentes propriedades mecânicas da lâmina sujeitas a incerteza (Casos 5.3 e 6.3, respetivamente).

Tabela 4.4.4 - Resultados das simulações estáticas para os casos de estudo 5.3 e 6.3.

Propriedades sujeitas a incerteza	$E_{11}, E_{22}, G_{12}, G_{23}, \nu_{12}$	$E_{11}$	$E_{22}$	$G_{12}$	$\nu_{12}$
Caso Estudo 5.3					
$\alpha_0$	[1,2125; 1,4866]	[1,2522; 1,4410]	[1,3217; 1,3580]	[1,3222; 1,3580]	[1,3338; 1,3453]
$\alpha_{0.2}$	[1,2350; 1,4558]	[1,2687; 1,4194]	[1,3253; 1,3543]	[1,3256; 1,3542]	[1,3338; 1,3453]
$\alpha_{0.4}$	[1,2601; 1,4243]	[1,2857; 1,3986]	[1,3288; 1,3506]	[1,3291; 1,3505]	[1,3357; 1,3434]
$\alpha_{0.6}$	[1,2862; 1,3942]	[1,3032; 1,3783]	[1,3324; 1,3469]	[1,3325; 1,3468]	[1,3377; 1,3415]
$\alpha_{0.8}$	[1,3115; 1,3673]	[1,3211; 1,3587]	[1,3360; 1,3433]	[1,3361; 1,3432]	[1,3377; 1,3415]
$\alpha_1$	1,3396	1,3396	1,3396	1,3396	1,3396
Amplitude Intervalo					
$\alpha_0$	20,456	14,089	2,712	2,672	0,863
$\alpha_{0.2}$	16,480	11,249	2,169	2,136	0,863
$\alpha_{0.4}$	12,253	8,424	1,627	1,601	0,575
$\alpha_{0.6}$	8,056	5,610	1,085	1,067	0,288
$\alpha_{0.8}$	4,167	2,803	0,542	0,533	0,288
Desvio Normalizado					
	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$
$\alpha_0$	0,000 1,000	0,145 0,834	0,398 0,531	0,400 0,531	0,443 0,485
$\alpha_{0.2}$	0,082 0,888	0,205 0,755	0,411 0,517	0,413 0,517	0,443 0,485
$\alpha_{0.4}$	0,174 0,773	0,267 0,679	0,424 0,504	0,425 0,504	0,450 0,478
$\alpha_{0.6}$	0,269 0,663	0,331 0,605	0,437 0,490	0,438 0,490	0,457 0,471
$\alpha_{0.8}$	0,361 0,565	0,396 0,533	0,451 0,477	0,451 0,477	0,457 0,471
$\alpha_1$	0,464	0,464	0,464	0,464	0,464
Caso Estudo 6.3					
$\alpha_0$	[1,1531; 1,4218]	[1,1864; 1,3761]	[1,2567; 1,2922]	[1,2592; 1,2897]	[1,2684; 1,2800]
$\alpha_{0.2}$	[1,1744; 1,3909]	[1,2030; 1,3544]	[1,2602; 1,2886]	[1,2621; 1,2865]	[1,2684; 1,2800]
$\alpha_{0.4}$	[1,1984; 1,3594]	[1,2201; 1,3334]	[1,2637; 1,2849]	[1,2651; 1,2834]	[1,2703; 1,2781]
$\alpha_{0.6}$	[1,2233; 1,3292]	[1,2376; 1,3131]	[1,2672; 1,2813]	[1,2681; 1,2803]	[1,2723; 1,2761]
$\alpha_{0.8}$	[1,2473; 1,3021]	[1,2556; 1,2934]	[1,2707; 1,2778]	[1,2712; 1,2773]	[1,2723; 1,2761]
$\alpha_1$	1,2742	1,2742	1,2742	1,2742	1,2742
Amplitude Intervalo					
$\alpha_0$	21,089	14,880	2,781	2,393	0,908
$\alpha_{0.2}$	16,993	11,880	2,225	1,914	0,908
$\alpha_{0.4}$	12,633	8,897	1,668	1,435	0,605
$\alpha_{0.6}$	8,304	5,925	1,112	0,957	0,303
$\alpha_{0.8}$	4,299	2,960	0,556	0,478	0,303
Desvio Normalizado					
	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$
$\alpha_0$	0,000 1,000	0,124 0,830	0,386 0,518	0,395 0,508	0,429 0,472
$\alpha_{0.2}$	0,079 0,885	0,186 0,749	0,399 0,504	0,406 0,497	0,429 0,472
$\alpha_{0.4}$	0,169 0,768	0,249 0,671	0,412 0,491	0,417 0,485	0,436 0,465
$\alpha_{0.6}$	0,262 0,655	0,315 0,595	0,425 0,477	0,428 0,474	0,444 0,458
$\alpha_{0.8}$	0,351 0,555	0,382 0,522	0,438 0,464	0,440 0,462	0,444 0,458
$\alpha_1$	0,451	0,451	0,451	0,451	0,451



Na Figura 4.27 apresentam-se os gráficos das funções de pertença para a deformada máxima da placa (adimensional), para os casos 5.3 e 6.3. Adicionalmente, na Tabela 4.4.4 encontram-se representados os valores dos intervalos obtidos. Relativamente às funções de pertença obtidas, estas são, mais uma vez, do tipo triangular. De modo semelhante aos casos analisados anteriormente, a variabilidade máxima da deformada da placa é obtida quando se considera incerteza ao nível de todas as propriedades mecânicas da lâmina simultaneamente. Para os casos em que se considera incerteza nas propriedades de forma individual, constata-se que  $E_{11}$  possui o maior efeito na variabilidade da resposta, seguido de  $G_{12}$ . No entanto,  $E_{11}$  possui uma influência na variabilidade consideravelmente superior à dos restantes parâmetros. A influência da relação  $a/h$  na variabilidade da deformada máxima da placa pode ser estabelecida através de uma comparação entre os resultados obtidos para os casos 5.3 e 6.3. A partir desta comparação é possível concluir que a utilização de placas mais finas conduz a um ligeiro aumento dos valores da variabilidade em todas as situações, com exceção do caso em que se considera incerteza apenas em  $G_{12}$ , registando-se um ligeiro decréscimo na variabilidade para este caso.

#### ***Influência da sequência de empilhamento***

Uma análise comparativa dos resultados obtidos para casos de estudo com diferentes sequências de empilhamento, mas igual relação  $a/h$ , revela que a sequência de empilhamento escolhida influencia, de forma muito ligeira, a variabilidade da deformada máxima. Em primeiro lugar, é de referir que, para todas as sequências de empilhamento, o parâmetro individual com maior impacto na variabilidade da resposta é o módulo de elasticidade longitudinal ( $E_{11}$ ). Para além disso, os valores de amplitude dos intervalos mostram que, em termos gerais, a sequência de empilhamento  $[0]_4$  apresenta maior variabilidade da resposta. No entanto, esta sequência de empilhamento é a menos afetada por incerteza em  $E_{22}$ . Por outro lado, as sequências de empilhamento  $[0\ 90]_5$  e  $[0\ 90]_2$  possuem uma variabilidade semelhante, verificando-se que a segunda é mais afetada por incerteza em  $E_{22}$  e  $G_{12}$ , e a primeira por incerteza nos restantes parâmetros. Contudo, é de referir que estas diferenças, apesar de existirem, não são muito significativas, verificando-se também que diminuem quando consideramos níveis  $\alpha$  mais elevados.

#### 4.4.2 Resultados Simulação Dinâmica – Frequência Natural Fundamental

##### Laminado $[0]_4$

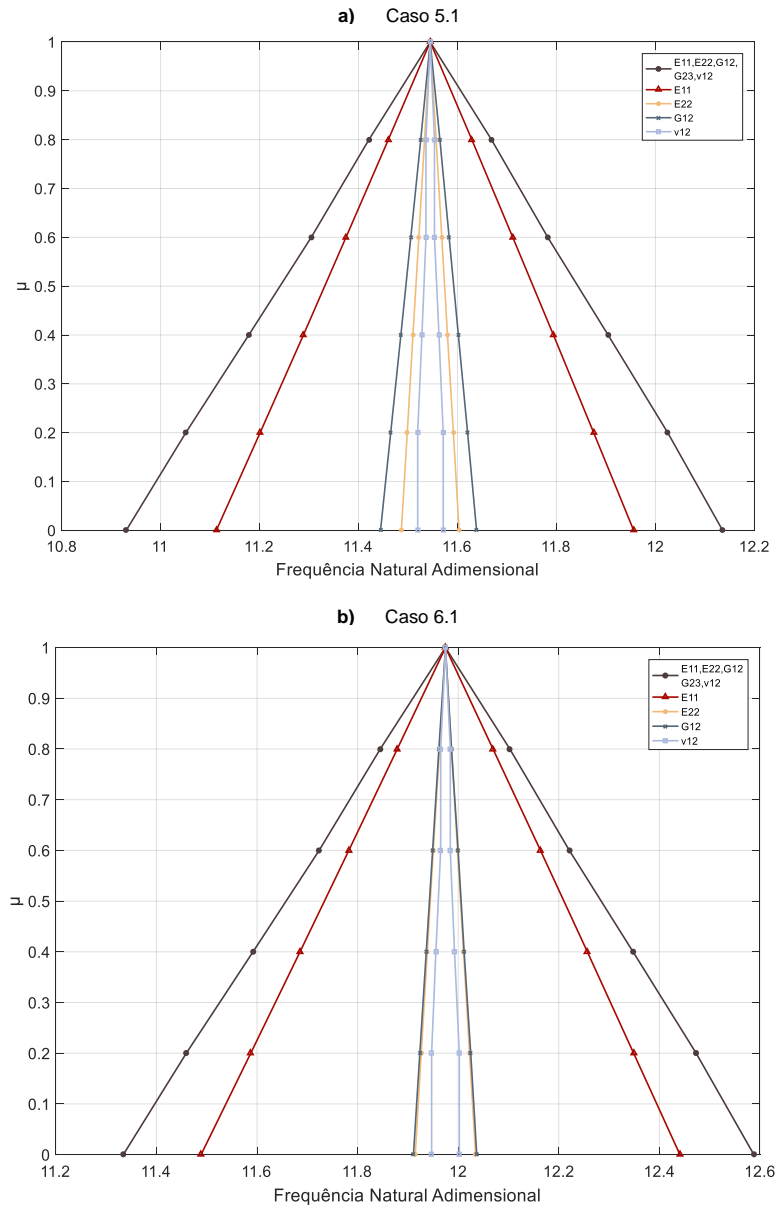


Figura 4.28 - Gráficos das funções de pertença *fuzzy* da frequência natural fundamental adimensional para diferentes propriedades mecânicas da lâmina sujeitas a incerteza (Casos 5.1 e 6.1, respectivamente).

Na Figura 4.28 apresentam-se os gráficos das funções de pertença da frequência natural fundamental (adimensionalizada) da placa, para os casos 5.1 e 6.1. Na Tabela 4.4.5 encontram-se representados os valores dos intervalos obtidos. Verifica-se que as funções de pertença da 1ª frequência natural, resultantes da simulação com incerteza nas propriedades mecânicas da lâmina, são do tipo triangular. É evidente que a variabilidade máxima da frequência natural ocorre para as simulações nas quais se considera incerteza em todas as propriedades simultaneamente, seguindo-se as simulações considerando incerteza em  $E_{11}$ . Para o caso 5.1,  $G_{12}$  é o terceiro parâmetro com maior impacto na variabilidade da resposta. No entanto, em 6.1 verifica-se que

tanto  $G_{12}$  como  $E_{22}$  possuem uma influência na variabilidade idêntica. É também notório a partir de uma análise dos valores das amplitudes dos intervalos que, tanto para 5.1 como para 6.1,  $E_{11}$  conduz a intervalos de resposta bastante superiores a qualquer outra das propriedades.

Tabela 4.4.5 - Resultados das simulações estáticas para os casos de estudo 5.1 e 6.1.

<i>Propriedades sujeitas a incerteza</i>	$E_{11}, E_{22}, G_{12}, G_{23}, v_{12}$	$E_{11}$	$E_{22}$	$G_{12}$	$v_{12}$
--	--	----------	----------	----------	----------

### Caso Estudo 5.1

$\alpha_0$	[10,9305; 12,1359]	[11,1127; 11,9561]	[11,4866; 11,6032]	[11,4445; 11,6386]	[11,5196; 11,5712]
$\alpha_{0.2}$	[11,0510; 12,0250]	[11,2011; 11,8753]	[11,4985; 11,5918]	[11,4651; 11,6205]	[11,5196; 11,5712]
$\alpha_{0.4}$	[11,1782; 11,9045]	[11,2886; 11,7940]	[11,5100; 11,5798]	[11,4856; 11,6018]	[11,5282; 11,5626]
$\alpha_{0.6}$	[11,3044; 11,7825]	[11,3747; 11,7118]	[11,5220; 11,5683]	[11,5057; 11,5832]	[11,5363; 11,5535]
$\alpha_{0.8}$	[11,4211; 11,6688]	[11,4603; 11,6291]	[11,5334; 11,5569]	[11,5258; 11,5645]	[11,5363; 11,5535]
$\alpha_1$	11,5449	11,5449	11,5449	11,5449	11,5449

#### Amplitude Intervalo

$\alpha_0$	10,441	7,306	1,011	1,681	0,447
$\alpha_{0.2}$	8,436	5,839	0,808	1,346	0,447
$\alpha_{0.4}$	6,291	4,378	0,605	1,006	0,298
$\alpha_{0.6}$	4,141	2,920	0,402	0,671	0,149
$\alpha_{0.8}$	2,145	1,462	0,203	0,335	0,149

#### Desvio Normalizado

	$\underline{u}$	$\bar{u}$	$\underline{u}$	$\bar{u}$	$\underline{u}$	$\bar{u}$	$\underline{u}$	$\bar{u}$	$\underline{u}$	$\bar{u}$
$\alpha_0$	0,000	1,000	0,151	0,851	0,461	0,558	0,426	0,587	0,489	0,532
$\alpha_{0.2}$	0,100	0,908	0,225	0,784	0,471	0,549	0,443	0,572	0,489	0,532
$\alpha_{0.4}$	0,205	0,808	0,297	0,716	0,481	0,539	0,461	0,557	0,496	0,524
$\alpha_{0.6}$	0,310	0,707	0,369	0,648	0,491	0,529	0,477	0,541	0,503	0,517
$\alpha_{0.8}$	0,407	0,612	0,440	0,580	0,500	0,520	0,494	0,526	0,503	0,517
$\alpha_1$	0,510	0,510	0,510	0,510	0,510	0,510	0,510	0,510	0,510	0,510

### Caso Estudo 6.1

$\alpha_0$	[11,3341; 12,5880]	[11,4887; 12,4409]	[11,9146; 12,0345]	[11,9110; 12,0369]	[11,9471; 12,0022]
$\alpha_{0.2}$	[11,4593; 12,4732]	[11,5875; 12,3489]	[11,9266; 12,0226]	[11,9237; 12,0250]	[11,9471; 12,0022]
$\alpha_{0.4}$	[11,5920; 12,3477]	[11,6855; 12,2569]	[11,9385; 12,0106]	[11,9365; 12,0118]	[11,9556; 11,9927]
$\alpha_{0.6}$	[11,7235; 12,2210]	[11,7825; 12,1636]	[11,9505; 11,9987]	[11,9492; 11,9999]	[11,9652; 11,9843]
$\alpha_{0.8}$	[11,8451; 12,1027]	[11,8789; 12,0692]	[11,9628; 11,9867]	[11,9616; 11,9867]	[11,9652; 11,9843]
$\alpha_1$	11,9748	11,9748	11,9748	11,9748	11,9748

#### Amplitude Intervalo

$\alpha_0$	10,471	7,952	1,001	1,051	0,460
$\alpha_{0.2}$	8,467	6,359	0,802	0,845	0,460
$\alpha_{0.4}$	6,311	4,771	0,602	0,629	0,309
$\alpha_{0.6}$	4,155	3,182	0,402	0,423	0,160
$\alpha_{0.8}$	2,151	1,589	0,200	0,210	0,160

#### Desvio Normalizado

	$\underline{u}$	$\bar{u}$	$\underline{u}$	$\bar{u}$	$\underline{u}$	$\bar{u}$	$\underline{u}$	$\bar{u}$	$\underline{u}$	$\bar{u}$
$\alpha_0$	0,000	1,000	0,123	0,883	0,463	0,559	0,460	0,561	0,489	0,533
$\alpha_{0.2}$	0,100	0,908	0,202	0,809	0,473	0,549	0,470	0,551	0,489	0,533
$\alpha_{0.4}$	0,206	0,808	0,280	0,736	0,482	0,540	0,480	0,541	0,496	0,525
$\alpha_{0.6}$	0,311	0,707	0,358	0,662	0,492	0,530	0,491	0,531	0,503	0,519
$\alpha_{0.8}$	0,408	0,613	0,435	0,586	0,501	0,520	0,500	0,520	0,503	0,519
$\alpha_1$	0,511	0,511	0,511	0,511	0,511	0,511	0,511	0,511	0,511	0,511

Relativamente à influência da relação  $a/h$  nos resultados obtidos, verifica-se que a variabilidade é semelhante em 5.1 e 6.1. Assim para o caso 6.1 ocorrem ligeiros aumentos na amplitude dos intervalos para todas as simulações, com exceção do caso em que se considera incerteza apenas em  $G_{12}$ , que regista um decréscimo da variabilidade. No entanto, estas diferenças são muito pequenas, pelo que  $a/h$  parece não ter um impacto significativo na variabilidade da resposta.

### Laminado $[0\ 90]_s$

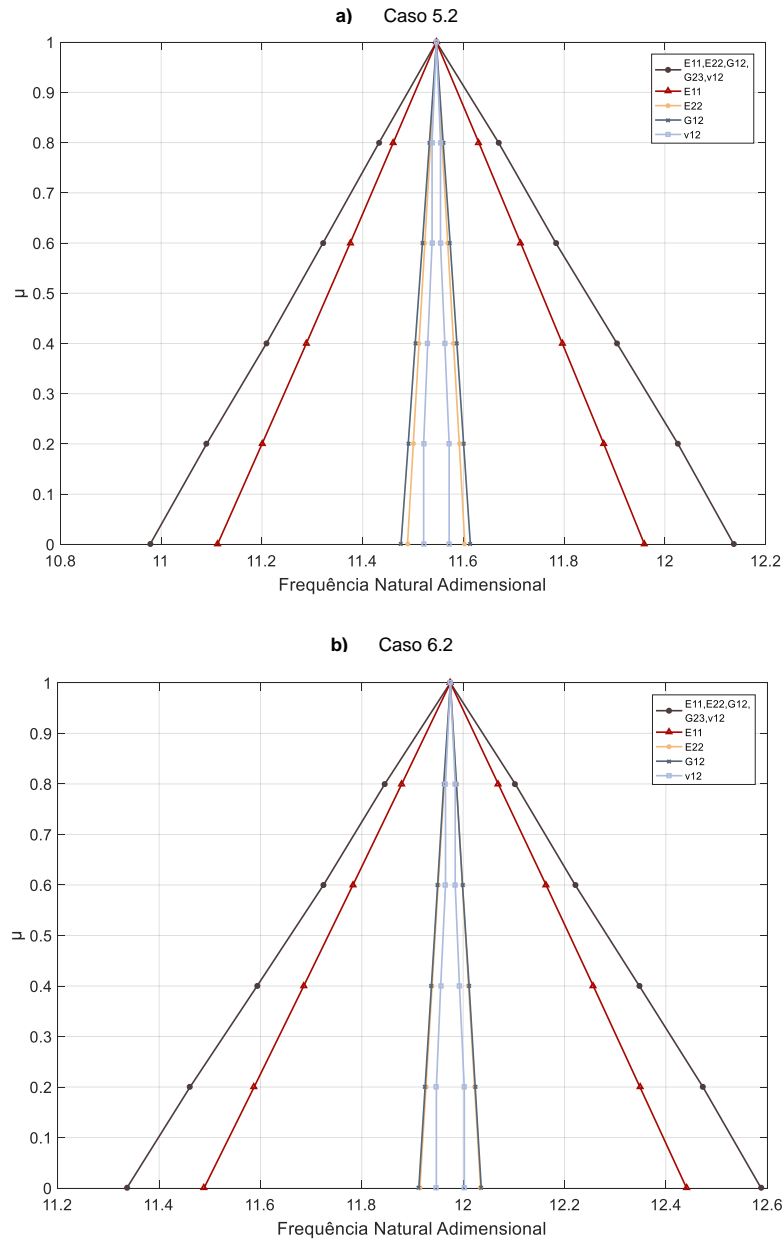


Figura 4.29 - Gráficos das funções de pertinência fuzzy da frequência natural fundamental adimensional para diferentes propriedades mecânicas da lâmina sujeitas a incerteza (Casos 5.2 e 6.2, respetivamente).

Tabela 4.4.6 - Resultados das simulações estáticas para os casos de estudo 5.2 e 6.2.

Propriedades sujeitas a incerteza	$E_{11}, E_{22}, G_{12}, G_{23}, \nu_{12}$	$E_{11}$	$E_{22}$	$G_{12}$	$\nu_{12}$
<b>Caso Estudo 5.2</b>					
$\alpha_0$	[10,9779; 12,1368]	[11,1117; 11,9595]	[11,4890; 11,6028]	[11,4761; 11,6138]	[11,5210; 11,5717]
$\alpha_{0.2}$	[11,0902; 12,0259]	[11,2002; 11,8787]	[11,5005; 11,5918]	[11,4904; 11,6004]	[11,5210; 11,5717]
$\alpha_{0.4}$	[11,2088; 11,9049]	[11,2882; 11,7964]	[11,5119; 11,5803]	[11,5043; 11,5870]	[11,5291; 11,5631]
$\alpha_{0.6}$	[11,3212; 11,7835]	[11,3752; 11,7137]	[11,5234; 11,5688]	[11,5186; 11,5736]	[11,5377; 11,5545]
$\alpha_{0.8}$	[11,4326; 11,6697]	[11,4608; 11,6305]	[11,5349; 11,5573]	[11,5325; 11,5597]	[11,5377; 11,5545]
$\alpha_1$	11,5464	11,5464	11,5464	11,5464	11,5464
<b>Amplitude Intervalo</b>					
$\alpha_0$	10,038	7,342	0,986	1,193	0,439
$\alpha_{0.2}$	8,104	5,876	0,791	0,952	0,439
$\alpha_{0.4}$	6,029	4,402	0,592	0,716	0,294
$\alpha_{0.6}$	4,004	2,932	0,393	0,476	0,145
$\alpha_{0.8}$	2,054	1,470	0,195	0,236	0,145
<b>Desvio Normalizado</b>					
	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$
$\alpha_0$	0,000      1,000	0,116      0,847	0,441      0,539	0,430      0,549	0,469      0,512
$\alpha_{0.2}$	0,097      0,904	0,192      0,777	0,451      0,530	0,442      0,537	0,469      0,512
$\alpha_{0.4}$	0,199      0,800	0,268      0,706	0,461      0,520	0,454      0,526	0,476      0,505
$\alpha_{0.6}$	0,296      0,695	0,343      0,635	0,471      0,510	0,467      0,514	0,483      0,498
$\alpha_{0.8}$	0,392      0,597	0,417      0,563	0,481      0,500	0,479      0,502	0,483      0,498
$\alpha_1$	0,491	0,491	0,491	0,491	0,491
<b>Caso Estudo 6.2</b>					
$\alpha_0$	[11,3362; 12,5880]	[11,4886; 12,4409]	[11,9146; 12,0345]	[11,9125; 12,0357]	[11,9471; 12,0022]
$\alpha_{0.2}$	[11,4610; 12,4732]	[11,5875; 12,3489]	[11,9266; 12,0226]	[11,9249; 12,0238]	[11,9471; 12,0022]
$\alpha_{0.4}$	[11,5933; 12,3477]	[11,6854; 12,2569]	[11,9387; 12,0106]	[11,9373; 12,0118]	[11,9556; 11,9927]
$\alpha_{0.6}$	[11,7245; 12,2210]	[11,7825; 12,1636]	[11,9506; 11,9987]	[11,9497; 11,9987]	[11,9652; 11,9843]
$\alpha_{0.8}$	[11,8455; 12,1027]	[11,8789; 12,0692]	[11,9628; 11,9867]	[11,9616; 11,9867]	[11,9652; 11,9843]
$\alpha_1$	11,9748	11,9748	11,9748	11,9748	11,9748
<b>Amplitude Intervalo</b>					
$\alpha_0$	10,453	7,953	1,001	1,029	0,460
$\alpha_{0.2}$	8,453	6,359	0,802	0,826	0,460
$\alpha_{0.4}$	6,300	4,772	0,601	0,622	0,309
$\alpha_{0.6}$	4,147	3,182	0,401	0,409	0,160
$\alpha_{0.8}$	2,147	1,589	0,200	0,210	0,160
<b>Desvio Normalizado</b>					
	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$
$\alpha_0$	0,000      1,000	0,122      0,883	0,462      0,558	0,460      0,559	0,488      0,532
$\alpha_{0.2}$	0,100      0,908	0,201      0,809	0,472      0,548	0,470      0,549	0,488      0,532
$\alpha_{0.4}$	0,205      0,808	0,279      0,736	0,481      0,539	0,480      0,540	0,495      0,524
$\alpha_{0.6}$	0,310      0,707	0,357      0,661	0,491      0,529	0,490      0,529	0,503      0,518
$\alpha_{0.8}$	0,407      0,612	0,434      0,586	0,501      0,520	0,500      0,520	0,503      0,518
$\alpha_1$	0,510	0,510	0,510	0,510	0,510

Relativamente aos resultados obtidos para os casos 5.2 e 6.2, correspondentes à análise do laminado de sequência de empilhamento  $[0\ 90]_s$ , verifica-se que as funções de pertença são do tipo triangular para todas as situações consideradas (Figura 4.29). Na Tabela 4.4.6 apresentam-se

os valores dos intervalos obtidos. Mais uma vez, e de acordo com o que seria de esperar, as simulações considerando incerteza em todas as propriedades simultaneamente resultam na maior variabilidade total da 1ª frequência natural da placa. Na análise de incerteza em propriedades de modo individual, o módulo de elasticidade longitudinal é a propriedade que provoca uma maior variabilidade da resposta estrutural. As restantes propriedades mecânicas possuem uma influência muito semelhante na variabilidade sendo que, no entanto, o seu impacto é muito inferior ao de  $E_{11}$ . Uma análise comparativa dos casos 5.2 e 6.2 revela que a relação  $a/h$  parece não ter um efeito significativo na variabilidade dos resultados obtidos. No entanto, para o caso 6.1 regista-se, relativamente a 5.1, um ligeiro aumento das amplitudes dos intervalos para todas as situações analisadas, com exceção da análise considerando incerteza apenas em  $G_{12}$ .

### Laminado $[0\ 90]_2$

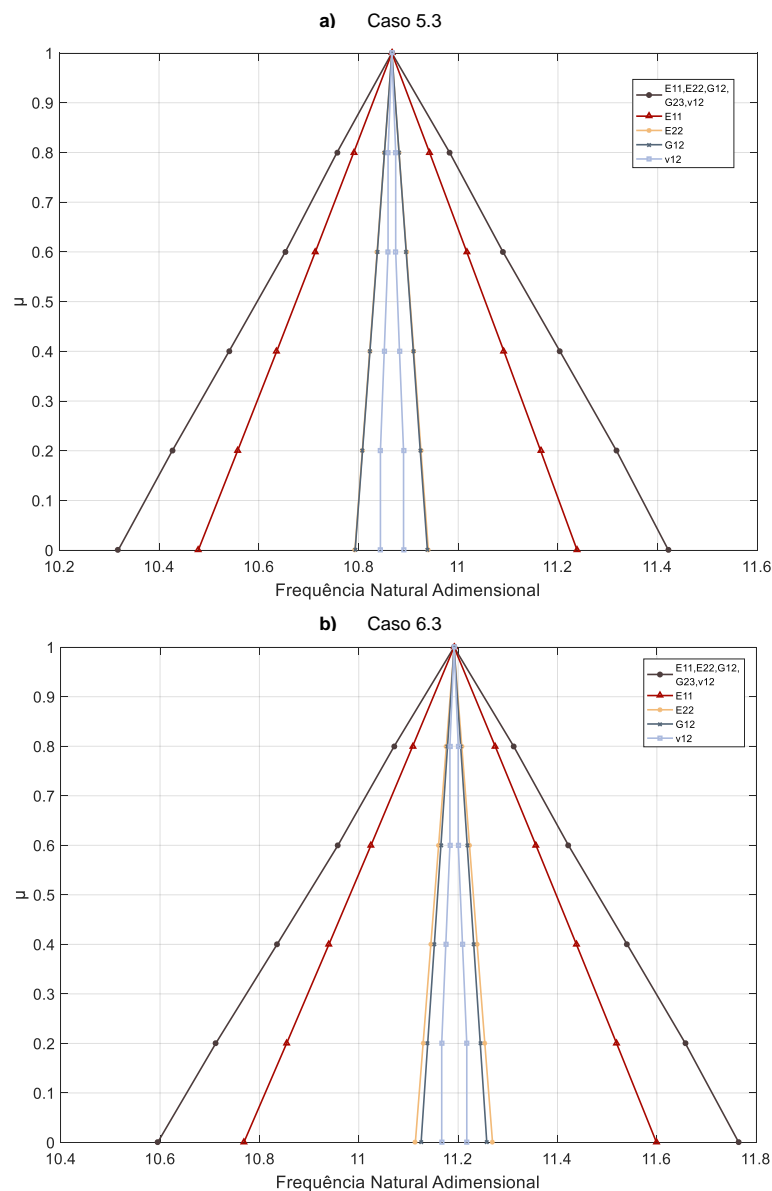


Figura 4.30 - Gráficos das funções de pertença fuzzy da frequência natural fundamental adimensional para diferentes propriedades mecânicas da lâmina sujeitas a incerteza (Casos 5.3 e 6.3, respetivamente).

Tabela 4.4.7 - Resultados das simulações estáticas para os casos de estudo 5.3 e 6.3.

Propriedades sujeitas a incerteza	$E_{11}, E_{22}, G_{12}, G_{23}, \nu_{12}$	$E_{11}$	$E_{22}$	$G_{12}$	$\nu_{12}$
<b>Caso Estudo 5.3</b>					
$\alpha_0$	[10,3180; 11,4216]	[10,4787; 11,2384]	[10,7928; 10,9401]	[10,7933; 10,9382]	[10,8440; 10,8904]
$\alpha_{0.2}$	[10,4266; 11,3173]	[10,5576; 11,1653]	[10,8076; 10,9253]	[10,8081; 10,9238]	[10,8440; 10,8904]
$\alpha_{0.4}$	[10,5404; 11,2040]	[10,6360; 11,0917]	[10,8225; 10,9109]	[10,8229; 10,9100]	[10,8516; 10,8822]
$\alpha_{0.6}$	[10,6532; 11,0897]	[10,7135; 11,0171]	[10,8373; 10,8961]	[10,8378; 10,8956]	[10,8593; 10,8746]
$\alpha_{0.8}$	[10,7570; 10,9826]	[10,7904; 10,9425]	[10,8521; 10,8813]	[10,8521; 10,8813]	[10,8593; 10,8746]
$\alpha_1$	10,8669	10,8669	10,8669	10,8669	10,8669
<b>Amplitude Intervalo</b>					
$\alpha_0$	10,155	6,991	1,355	1,333	0,427
$\alpha_{0.2}$	8,197	5,592	1,082	1,065	0,427
$\alpha_{0.4}$	6,107	4,193	0,814	0,801	0,282
$\alpha_{0.6}$	4,017	2,794	0,541	0,532	0,141
$\alpha_{0.8}$	2,077	1,399	0,268	0,268	0,141
<b>Desvio Normalizado</b>					
	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$
$\alpha_0$	0,000      1,000	0,146      0,834	0,430      0,564	0,430      0,562	0,477      0,519
$\alpha_{0.2}$	0,098      0,906	0,217      0,768	0,444      0,550	0,442      0,549	0,477      0,519
$\alpha_{0.4}$	0,201      0,803	0,288      0,701	0,457      0,537	0,454      0,536	0,484      0,511
$\alpha_{0.6}$	0,304      0,699	0,358      0,633	0,471      0,524	0,467      0,523	0,490      0,504
$\alpha_{0.8}$	0,398      0,602	0,428      0,566	0,484      0,510	0,479      0,510	0,490      0,504
$\alpha_1$	0,497	0,497	0,497	0,497	0,497
<b>Caso Estudo 6.3</b>					
$\alpha_0$	[10,5952; 11,7649]	[10,7687; 11,5993]	[11,1139; 11,2693]	[11,1255; 11,2577]	[11,1670; 11,2174]
$\alpha_{0.2}$	[10,7121; 11,6574]	[10,8547; 11,5190]	[11,1295; 11,2537]	[11,1387; 11,2445]	[11,1670; 11,2174]
$\alpha_{0.4}$	[10,8356; 11,5401]	[10,9400; 11,4381]	[11,1451; 11,2383]	[11,1521; 11,2314]	[11,1752; 11,2088]
$\alpha_{0.6}$	[10,9581; 11,4220]	[11,0246; 11,3567]	[11,1607; 11,2229]	[11,1654; 11,2182]	[11,1835; 11,2003]
$\alpha_{0.8}$	[11,0713; 11,3117]	[11,1085; 11,2745]	[11,1763; 11,2074]	[11,1787; 11,2051]	[11,1835; 11,2003]
$\alpha_1$	11,1918	11,1918	11,1918	11,1918	11,1918
<b>Amplitude Intervalo</b>					
$\alpha_0$	10,451	7,422	1,388	1,181	0,451
$\alpha_{0.2}$	8,446	5,935	1,110	0,945	0,451
$\alpha_{0.4}$	6,295	4,450	0,833	0,708	0,300
$\alpha_{0.6}$	4,145	2,967	0,555	0,472	0,151
$\alpha_{0.8}$	2,148	1,483	0,278	0,236	0,151
<b>Desvio Normalizado</b>					
	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$	$\underline{u}$ $\bar{u}$
$\alpha_0$	0,000      1,000	0,148      0,858	0,443      0,576	0,453      0,566	0,489      0,532
$\alpha_{0.2}$	0,100      0,908	0,222      0,790	0,457      0,563	0,465      0,555	0,489      0,532
$\alpha_{0.4}$	0,206      0,808	0,295      0,721	0,470      0,550	0,476      0,544	0,496      0,525
$\alpha_{0.6}$	0,310      0,707	0,367      0,651	0,483      0,537	0,487      0,533	0,503      0,517
$\alpha_{0.8}$	0,407      0,613	0,439      0,581	0,497      0,523	0,499      0,521	0,503      0,517
$\alpha_1$	0,510	0,510	0,510	0,510	0,510

Nos casos 5.3 e 6.3, correspondentes à análise do laminado de empilhamento  $[0\ 90]_2$ , verifica-se que todas as simulações conduzem à obtenção de funções de pertença triangulares (Figura

4.30). Os valores dos intervalos obtidos são apresentados na Tabela 4.4.7. Consonante as propriedades para as quais se considera incerteza, verifica-se a ocorrência de maior ou menor variabilidade nos valores obtidos para a 1ª frequência natural da placa. Assim, de modo semelhante aos casos anteriormente analisados, a simulação considerando incerteza ao nível de várias propriedades mecânicas da lâmina simultaneamente conduz à maior variabilidade total da frequência natural. Por outro lado, ao nível da incerteza em propriedades individuais, constata-se que  $E_{11}$  é aquela que provoca maior variabilidade da resposta. Seguem-se  $G_{12}$  e  $E_{22}$ , que possuem um efeito muito semelhante na variabilidade, apesar de consideravelmente inferior ao de  $E_{11}$ . O coeficiente de Poisson ( $\nu_{12}$ ) é, de todas as propriedades cuja influência foi analisada, aquela que menos impacto tem na variabilidade da resposta. Uma comparação dos resultados obtidos para 5.3 e 6.3 mostra que o aumento da relação  $a/h$  não conduz a grandes alterações em termos de variabilidade da resposta. No entanto, tal como nos casos anteriores, verificam-se ligeiros aumentos da amplitude dos intervalos em todas as situações, com exceção de  $G_{12}$ .

#### ***Influência da sequência de empilhamento***

Uma análise comparativa dos resultados obtidos com diferentes sequências de empilhamento, mas igual relação  $a/h$ , permite determinar se a sequência de empilhamento do laminado tem influência na variabilidade da frequência natural fundamental. Verifica-se que, para todas as sequências de empilhamento, o módulo de elasticidade longitudinal ( $E_{11}$ ) é a propriedade com maior impacto na variabilidade da resposta. Para além disso, a sequência de empilhamento parece não influenciar significativamente a variabilidade da frequência natural fundamental, uma vez que os valores de amplitude de intervalos obtidos para os diferentes casos de estudo são semelhantes. Existem, no entanto, ligeiras diferenças. Assim, o empilhamento  $[0]_4$  apresenta a maior variabilidade para todas as propriedades, com exceção de  $E_{22}$  para a relação  $a/h$  de 20, e  $E_{22}$  e  $G_{12}$  para a relação  $a/h$  de 100. Nestes casos a maior variabilidade ocorre para  $[0\ 90]_2$ . No entanto, tal como já foi referido, as diferenças entre a utilização de diferentes sequências de empilhamento são muito reduzidas, verificando-se ainda um decréscimo destas diferenças para os níveis  $\alpha$  mais elevados.



#### 4.4.3 Resultados Simulação Dinâmica – FRFs

##### Laminado $[0]_4$

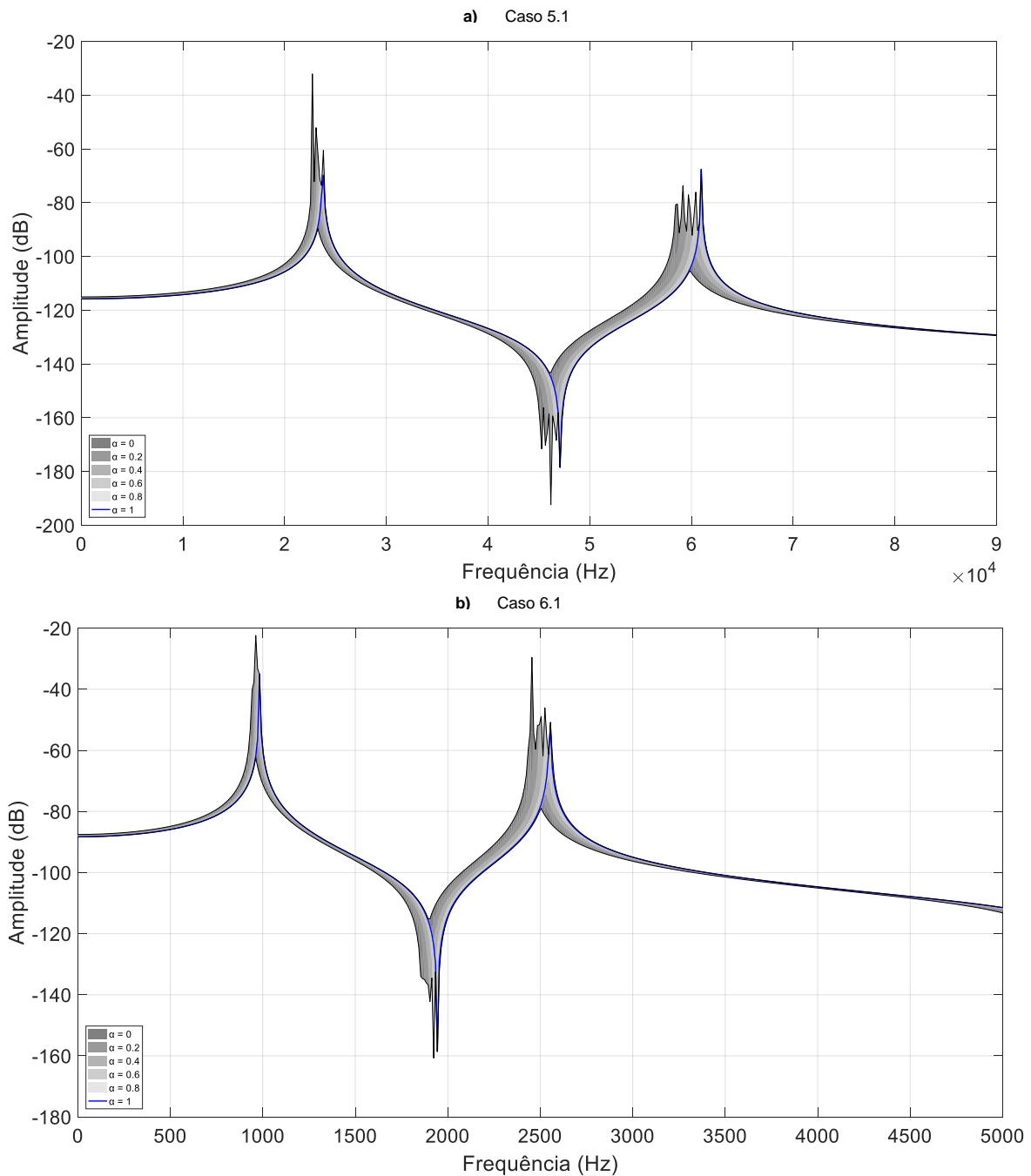


Figura 4.31 - Representação gráfica da variabilidade associada às FRF da placa (casos 5.1 e 6.1, respetivamente).

Na Figura 4.31 procura-se caracterizar a variabilidade associada aos FRF resultantes da simulação para os casos de estudo 5.1 e 6.1. Nesta figura representa-se, tal como nos casos analisados nos subcapítulos anteriores, a FRF resultante da simulação determinística (para  $\alpha = 1$ ) e as FRF resultantes de análises nas quais se considera incerteza em parâmetros de entrada do modelo (restantes níveis  $\alpha$ ). Através da análise desta figura é possível constatar a existência de

variabilidade nas FRF obtidas. Verifica-se a ocorrência de um alargamento das regiões para as quais podem ocorrer os picos de amplitude de resposta. Verifica-se também um ligeiro aumento dos valores das amplitudes registadas para alguns níveis  $\alpha$  sendo que, no entanto, os valores permanecem próximos dos que se verificam para a FRF determinística. Consta-se que frequências superiores parecem conduzir a maior variabilidade, uma vez que para frequências mais baixas se observa uma maior concordância das diferentes FRF. Para além disto, verifica-se que os FRF possuem variabilidade mais significativa nas regiões correspondentes às frequências naturais, sendo esta variabilidade praticamente nula para outras frequências. Relativamente à influência da relação  $a/h$  na variabilidade dos FRF, esta parece ser praticamente inexistente, uma vez que os resultados obtidos para os casos de estudo 5.1 e 6.1 são bastante semelhantes.

### Laminado $[0\ 90]_s$

Nas Figura 4.32 e Figura 4.33 apresenta-se a representação gráfica da variabilidade associada às FRF resultantes da simulação realizada para os casos de estudo 5.2 e 6.2. Uma análise desta figura permite observar a ocorrência, tal como acontece nos casos anteriores, de um alargamento das banda de frequências para as quais podem ocorrer os picos de amplitude. Para além disso, verifica-se a ocorrência de um aumento dos valores das amplitudes destes picos de resposta, para a quase totalidade dos níveis  $\alpha$ . Desta forma, constata-se que a incerteza nas propriedades mecânicas da lâmina conduz à existência de variabilidade significativa nas FRF das placas de laminados de empilhamento  $[0\ 90]_s$ . Esta variabilidade, tal como nos casos anteriores, é tanto mais significativa quanto maior forem as frequências consideradas. A relação  $a/h$  de 20 do caso 5.2 parece conduzir a maior variabilidade dos picos de amplitude de resposta, comparativamente com 6.2.

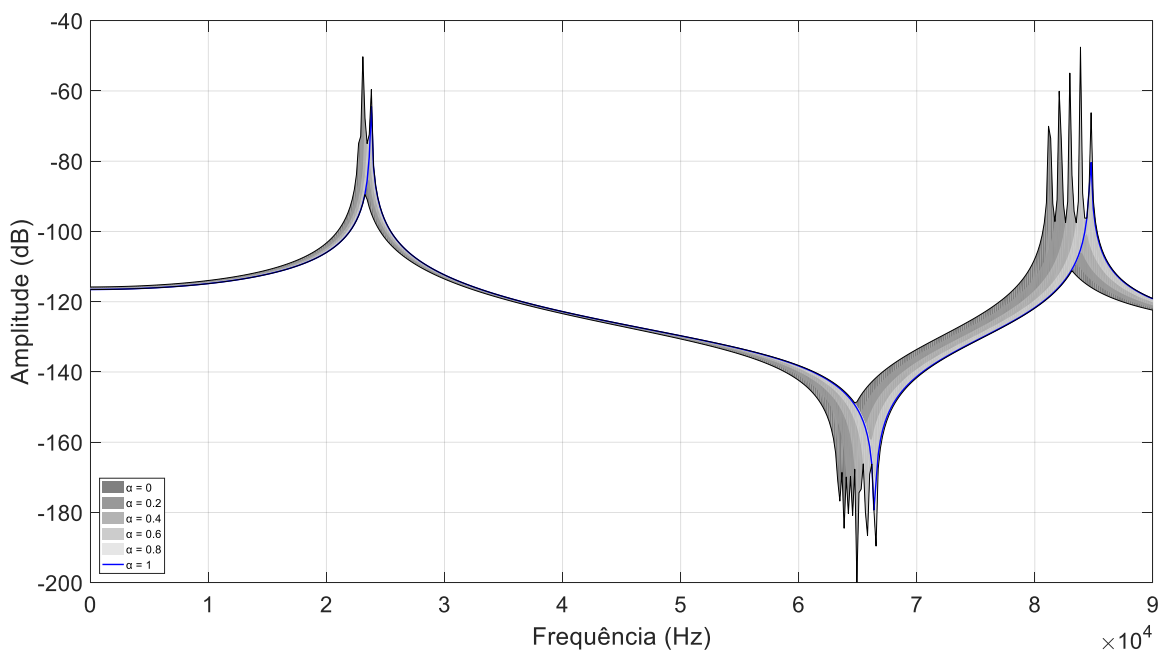


Figura 4.32 - Representação gráfica da variabilidade associada às FRF da placa (caso 5.2).

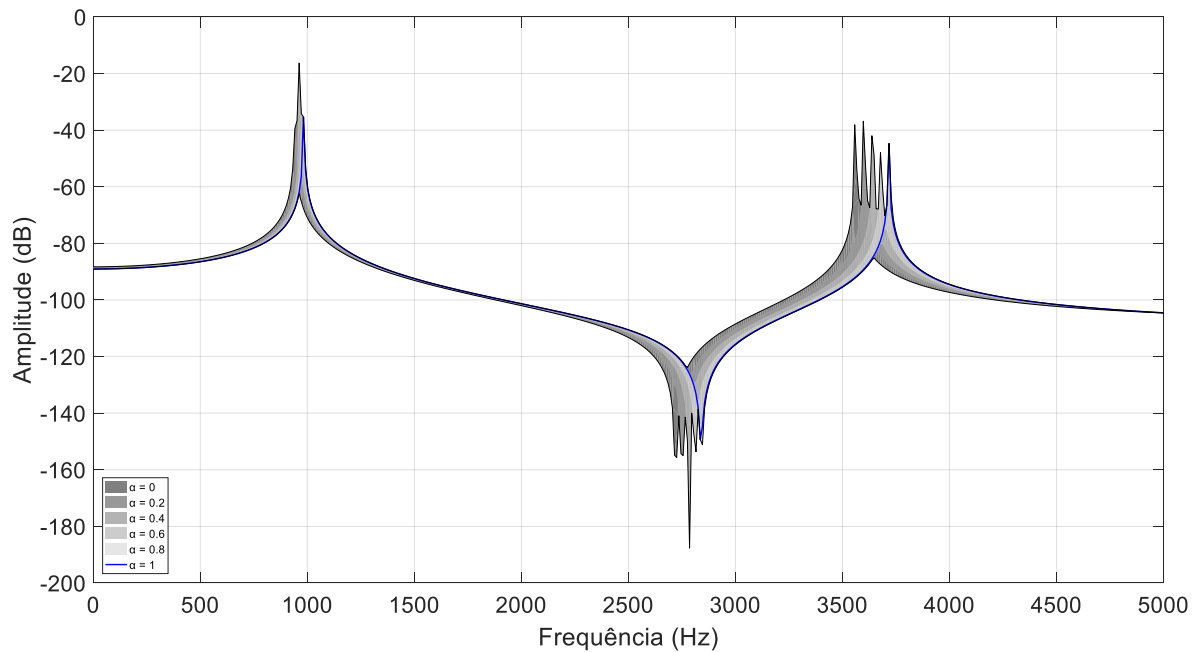


Figura 4.33 - Representação gráfica da variabilidade associada às FRF da placa (caso 6.2).

### Laminado $[0\ 90]_2$

Na Figura 4.34 representam-se graficamente as FRF obtidas para diferentes níveis  $\alpha$ , resultantes da simulação para os casos de estudo 5.3 e 6.3. Como é possível constatar a partir da análise das figuras, a variabilidade da resposta é reduzida para a totalidade da gama de frequências considerada para o caso 5.3. Assim, verifica-se uma concordância das FRF relativas aos diferentes níveis  $\alpha$  relativamente à FRF correspondente a uma simulação determinística. Para o caso 6.3, a variabilidade é também reduzida em grande parte da gama de frequências analisada. Esta variabilidade aumenta, no entanto, para os valores de frequência mais elevados, devido ao aparecimento de um pico de amplitude de resposta a uma frequência elevada. Assim, apesar de aparentemente o caso de estudo 6.3 apresentar uma maior variabilidade, não é possível retirar conclusões definitivas, uma vez que não é possível visualizar um pico de amplitude de resposta semelhante para o caso 5.3.

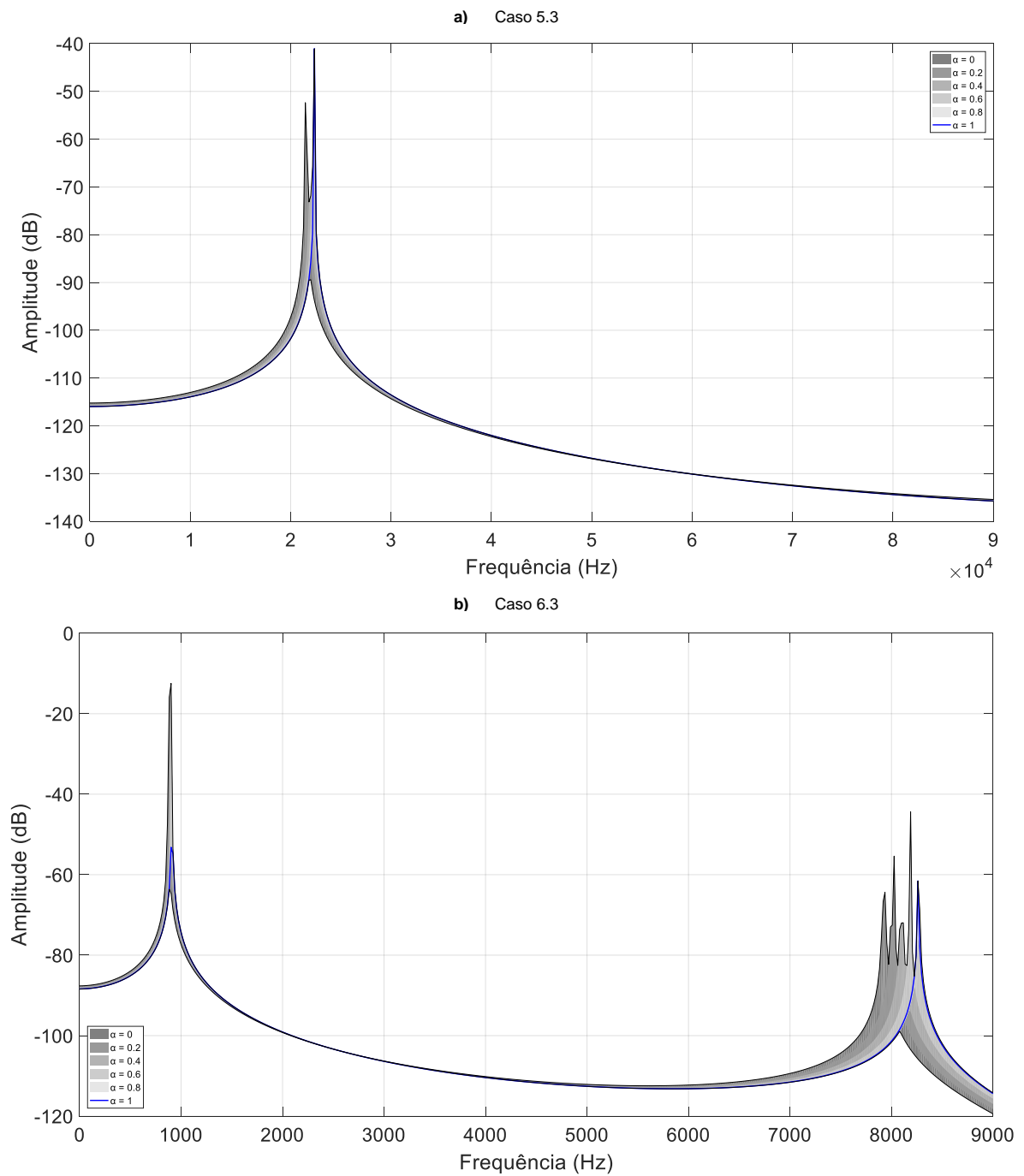


Figura 4.34 - Representação gráfica da variabilidade associada às FRF da placa (casos 5.3 e 6.3, respectivamente).

## 5. Conclusões

---

No presente trabalho é realizada uma caracterização da influência que a incerteza possui na variabilidade da resposta de estruturas de material compósito laminado. Para tal, foram estudadas as origens e tipos de incerteza associados a parâmetros de modelação deste tipo de materiais, cujas propriedades globais são função das propriedades materiais e geométricas de cada uma das suas lâminas. Este estudo evidencia, em primeiro lugar, a elevada complexidade associada a todo o processo de projeto e fabrico deste tipo de estruturas, fator que contribui fortemente para a presença de incerteza significativa nas suas propriedades mecânicas e geométricas. Para além disso, constata-se também a dificuldade que existe em definir, de forma objetiva, todas as fontes de incerteza associadas a estes mesmos materiais, devido à existência de interdependência entre as diversas variáveis envolvidas nos processos de fabrico. A partir deste estudo é possível estabelecer uma relação entre diversas fontes de incerteza, relacionadas com os diversos parâmetros de modelação, e a variabilidade das respostas do modelo numérico de uma estrutura em material compósito. Esta análise, realizada ainda numa fase de projeto, permite prever quais os parâmetros mais significativos para a descrição da variabilidade das respostas da estrutura a solicitações estáticas e dinâmicas e como tal permite dar informação ao processo de fabrico acerca do controlo de alguns dos seus parâmetros. Para além de permitir antever a dispersão das respostas de uma estrutura real. Assim, estabeleceu-se que deveria ser realizada simulação considerando incerteza ao nível dos ângulos de orientação das fibras, da espessura laminar e de diferentes propriedades mecânicas das lâminas.

Para caracterizar os efeitos da incerteza foi elaborado um método de análise computacional baseado no FFEM, com recurso a uma utilização conjunta do software ANSYS Mechanical APDL 17.2 e MATLAB. Assim, é possível caracterizar a variabilidade de algumas das variáveis de resposta da estrutura em termos de uma função de pertença *fuzzy*. A metodologia computacional utilizada apresenta versatilidade, uma vez que permite análise de estruturas com diferentes geometrias, tendo em conta que permite a incorporação de qualquer modelo de compósito laminado no ANSYS.

Realizaram-se estudos para determinar a dimensão de malha adequada à simulação (estudo de convergência), bem como estudos para validação dos resultados obtidos a partir do modelo de elementos finitos implementado no ANSYS, através da comparação com resultados disponíveis na literatura. Obtiveram-se resultados muito próximos das soluções exatas apresentadas em [6].

Procedeu-se à realização de análises estáticas e dinâmicas, tendo sido obtidas as funções de pertença *fuzzy* da deformada máxima e da frequência natural fundamental de placas com

diferentes sequências de empilhamento e relações  $a/h$ . Para além disso, analisaram-se também os efeitos da incerteza nas funções de resposta em frequência de placas correspondentes aos diferentes casos de estudo. Relativamente aos parâmetros de modelação, foram utilizadas funções de pertença triangular para modelar a incerteza.

A análise dos resultados obtidos permite constatar que a incerteza nas propriedades mecânicas da lâmina é aquela que conduz a maior variabilidade da resposta, tanto para o caso da deformada máxima como para o caso da frequência natural fundamental. Em termos de influência na variabilidade das variáveis de resposta, segue-se a incerteza na espessura laminar e, por fim, a incerteza nos ângulos de orientação das fibras. Para além disso, verificou-se que os casos nos quais se considera incerteza nos ângulos de orientação das fibras não produzem variabilidade da resposta significativa, especialmente para os casos de menor variação dos ângulos das fibras (níveis  $\alpha$  mais elevados). Assim, mesmo um desvio de  $\pm 2^\circ$  nos ângulos de orientação das fibras tem um impacto relativamente reduzido na resposta. Verifica-se também que a incerteza ao nível da espessura laminar origina variabilidade considerável das diferentes variáveis de resposta. O mesmo acontece com o caso da incerteza nas propriedades mecânicas das lâminas. Constata-se também que, quando se considera incerteza em propriedades mecânicas de forma individual, o módulo longitudinal de elasticidade ( $E_{11}$ ) é a propriedade que conduz a uma maior variabilidade da resposta.

Para além disto, constata-se que a sequência de empilhamento parece não influenciar de forma significativa a variabilidade das variáveis de resposta. No caso da incerteza nos ângulos da orientação das fibras verifica-se que diferentes sequências de empilhamento originam ligeiras alterações na forma das funções de pertença obtidas. No entanto, no caso da incerteza na espessura laminar e nas propriedades mecânicas da lâmina as diferenças são quase nulas (e de forma especialmente evidente no caso da incerteza na espessura laminar). Assim, apesar de existirem pequenas diferenças em alguns casos, as diferentes sequências de empilhamento consideradas possuem, de modo geral, uma variabilidade associada semelhante, para os vários tipos de incerteza considerados. Relativamente à influência da relação  $a/h$  na variabilidade das diferentes variáveis de resposta verificou-se que, em termos gerais, os casos de estudo com  $a/h$  de 100 apresentam uma variabilidade ligeiramente superior aos casos de estudo de  $a/h$  igual a 20. No entanto, estas diferenças são, mais uma vez, pequenas, pelo que os efeitos da relação  $a/h$  parecem não ser muito significativos.

Do ponto de vista de trabalhos futuros, poderão ser estudados os efeitos de incerteza em outros parâmetros estruturais, bem como ao nível das condições fronteira do problema. Poderão também ser estudados os efeitos da incerteza em cargas estáticas ou dinâmicas aplicadas na estrutura. Poderão ser analisados os efeitos das incertezas considerados no presente trabalho em estruturas

de geometria mais complexa. Finalmente, poderá proceder-se a uma validação experimental dos resultados apresentados no presente trabalho.





## 6. Bibliografia

---

1. Mallick P.K. (2008), Fiber Reinforced Composites: Materials, Manufacturing and Design, 3ª Edição, CRC Press, Boca Raton.
2. Mesogitis T.S., Skordos A.A., Long A.C. (2014), Uncertainty in the manufacturing of fibrous thermosetting composites: A review, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 57 (2), 67–75.
3. Shiao M.C., Chamis C.C. (1999), Probabilistic evaluation of fuselage-type composite structures. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 14(1–2), 179–187.
4. Sriramula S., Chryssanthopoulos M.K. (2009), Quantification of uncertainty modelling in stochastic analysis of FRP composites, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 40(11), 1673–1684.
5. Rahimi N., Musa M., Hussain A.K., Mahmud J. (2012), Finite Element Implementations to Predict the Failure of Composite Laminates Under Uniaxial Tension, *Advanced Materials Research*, 499, 20–24.
6. Reddy J.N. (2004), *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, 2ª Edição, CRC Press, New York, NY.
7. Zang T.A., Hemsch M.J., Hilburger M.W., Kenny S.P., Luckring J.M., Maghami P., Stroud W.J. (2002), Needs and opportunities for uncertainty-based multidisciplinary design methods for aerospace vehicles, Nasa, 211462 (July).
8. Melzer C.M., Platz R., Melz T. (2015), Consistent Comparison of Methodical Approaches to Describe and Evaluate Uncertainty in the Load-Carrying Capacity of a Truss Structure, *International Conference on Structural Engineering Dynamics ICEDyn*, 22-24 June 2015, Lagos, Portugal
9. Singh R.P. (2015), Vibration and Bending Behavior of Laminated Composite Plate with Uncertain Material Properties Using Fuzzy Finite Element Method, *Dissertação de*

10. Noor A.K., Starnes J.H., Peters J. M. (2000), Uncertainty analysis of composite structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 185(2–4), 413–432.
11. Matthews F.L, Rawlings R.D. (1999), *Composite Materials: Engineering and Science*, 1ª edição, Cambridge: Woodhead Publishing.
12. Jones R.M. (1998), *Mechanics Of Composite Materials*, 2ª Edição, CRC Press Inc.
13. Barbero E.J. (2014), *Finite Element Analysis of Composite Materials Using ANSYS®*, 2ª Edição, Bosa Roca, United States, CRC Press Inc.
14. Shaw A., Sriramula S., Gosling P.D., Chryssanthopoulos M.K. (2010), A critical reliability evaluation of fibre reinforced composite materials based on probabilistic micro and macro-mechanical analysis, *Composites Part B*, 41, 446–53.
15. Potter K., Khan B., Wisnom M., Bell T., Stevens J. (2008), Variability , fibre waviness and misalignment in the determination of the properties of composite materials and structures, *Composites Part A*, 39, 1343–54.
16. Beyer H., Sendhoff B. (2007), Robust optimization – A comprehensive survey, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196, nº 33-34, 3190-3218
17. Potter K. (2009), Understanding the origins of defects and variability in composites manufacture, *International conference on composite materials (ICCM)-17*, Edinburgh, UK.
18. Fernlund G., Rahman N., Courdji R., Bresslauer M., Poursartip A., Willden K., Nelson K. (2002), Experimental and numerical study of the effect of cure cycle , tool surface , geometry, and lay-up on the dimensional fidelity of autoclave-processed composite parts, *Composites Part A*, 33, 341-51.
19. Zadeh L. (1965), Fuzzy sets. *Information and Control*, 8, 338–353.

20. Zimmermann H.J. (2010), Fuzzy set theory, Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics, 2(3), 317-332.
21. Hanss M. (2004), Applied Fuzzy Arithmetic: An Introduction with Engineering Applications, Springer, Berlin.
22. Roy C.J., Oberkampf W.L. (2011), A comprehensive framework for verification, validation, and uncertainty quantification in scientific computing, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 200, 2131–44.
23. Vandepitte D., Moens D. (2009), Quantification of uncertain and variable model parameters in non-deterministic analysis, Proceedings of the IUTAM symposium on the vibration analysis of structures with uncertainties, St. Petersburg (Russia), Springer, 15–28.
24. Samui P., Kim D., Chakraborty S. (2016), Modeling and Simulation Techniques in Structural Engineering, 1ª Edição, IGI Global.
25. Massa F., Tison T., Lallemand B. (2009), Fuzzy modal analysis: Prediction of experimental behaviours, Journal of Sound and Vibration, 322 (1–2), 135–154.
26. Akpan U., Koko T., Orisamolu I., Gallant B. (2001), Practical fuzzy finite element analysis of structures, Finite Elements in Analysis and Design, 38, 93–111.
27. Farkas L., Moens D., Donders S., Vandepitte D., Desmet W. (2006), The fuzzy FE approach to assess the uncertain static response of an industrial vehicle, Proceedings of ISMA 2006: International Conference on Noise and Vibration Engineering, 1–8, 4125–4143.
28. ANSYS Mechanical APDL 17.2 Help Documentation.